미분은 쌀가루예요. 그걸 모아서 떡을 만드는 게 적분이지요.
양념을 넣고 보글보글 끓여 떡볶이를 만들면 미적분학이 완성된답니다♡

미적분학 첫걸음

An Invitation to Calculus

미적분학 첫걸음

미분은 쌀가루예요. 그걸 모아서 떡을 만드는 게 적분이지요.
양념을 넣고 보글보글 끓여 떡볶이를 만들면 미적분학이 완성된답니다♡

미적분학 첫걸음 An Invitation to Calculus
영재학교 미적분학 교과서

펴낸날 2022년 8월
지은이 이슬비 | designeralice@daum.net | iseulbee.com

들어가며

미적분학의 세계에 오신 것을 환영합니다♡

미적분학은 수열과 함수의 극한, 미분, 적분, 무한급수를 다루는 수학의 분야입니다. 미분과 적분은 함수를 분석하는 도구이며 수학을 기반으로 하는 분야에서 유용하게 사용됩니다. 하지만 미적분학을 공부하는 의미가 유용한 도구의 사용법을 배우는 일에만 있지는 않습니다.

수학이 발전하는 과정에서 미적분학의 이론이 견고해짐에 따라 수 체계가 명확하게 정의되었고 함수의 개념이 확립되었으며 엄밀한 논증 방법이 탄생하였습니다. 미적분학을 공부하는 진정한 의미는 이와 같은 발전 과정을 살펴보고 수학의 아름다움을 맛보는 데에 있습니다.

이 책은 미적분학을 처음 공부하는 영재학교 학생을 대상으로 하는 교재입니다.[1] 수열의 극한에서 시작하여 테일러 급수에 이르기까지 미적분학을 공부하며 꼭 살펴보아야 할 내용을 담았습니다.

한 권의 책에 모든 내용을 담을 수는 없었기에 간단하게 소개하거나 연습문제로 남긴 주제도 있습니다. 정적분(12단원)과 테일러 급수(19, 20단원)를 다룰 때는 미적분학 수준에서 이해하기 어려운 증명을 생략하였습니다. 미적분학을 더욱 깊이 공부하고자 하는 사람은 연습문제의 안내에 따라 심화한 주제를 탐구해 보기 바랍니다.

각 단원 끝에 수준별로 배치된 연습문제가 있습니다. 미적분학을 처음 공부하는 사람이라면 ‘개념에 익숙해지기 위한 문제’와 ‘개념을 다지기 위한 문제’만 풀고 다음 단원으로 넘어가도 됩니다. ‘수학을 사랑하는 사람을 위한 문제’는 미적분학의 수준을 넘는 것이므로 미지의 세계를 향한 도전정신이 충만한 사람만 풀면 됩니다.

연습문제는 되도록 친구들과 함께 풀고 서로 도와가며 해결법을 찾아가기를 권합니다. 그 과정에서 스스로 알아차리지 못한 오개념을 깨닫고, 하나의 문제를 해결하는 다양한 방법을 찾아낼 수 있기 때문입니다.

미적분학은 시간을 들여 공부하면 그만큼 보답하는 정직한 과목입니다. 공부하다 어렵게 느껴지는 순간이 오더라도 포기하지 말고 끝까지 나아갑시다. 미래를 향해 전진하는 우리 학생들 모두에게 행운과 행복이 가득하기를 기원합니다.

2022년 가을의 문턱에서
이슬비

---

1) 영재학교 학생이 아니라면 부록 ‘집합과 함수’를 먼저 읽어보기 바랍니다. 영재학교 학생이더라도 1학년 1학기에 공부한 내용을 잊었다면 ‘집합과 함수’ 단원을 읽으며 복습하기를 권합니다.

내용 순서

Ⅲ. 적분

Ⅳ. 무한급수

시작하는 이야기

미적분학을 공부하기 위한 준비

이 단원에서는 미적분학을 공부하기 위해 필요한 몇 가지 개념과 기호를 살펴본다. 이 단원을 처음부터 모두 읽기가 부담스럽다면 2절 '자주 사용하는 집합'만 읽고 1단원으로 넘어간 뒤, 3단원을 공부하기 전에 이 단원을 다시 보는 것도 괜찮다.

1 실수계의 최소상계 성질

실수계[2]에는 덧셈과 곱셈이라는 이항연산이 정의되어 있으며, 실수의 크기를 비교하는 순서관계도 정의되어 있다. 또한 '덧셈에 대한 역원을 더하는 연산'으로서 뺄셈을 할 수 있고, '곱셈에 대한 역원을 곱하는 연산'으로서 나눗셈을 할 수 있다. 이와 같이 0으로 나누는 것을 제외한 사칙계산을 자유롭게 할 수 있고 수의 크기를 비교할 수 있는 수 체계를 순서체라고 부른다.

유리수 집합과 실수 집합은 모두 순서체이다. 그러나 실수 집합은 유리수 집합과는 달리 '최소상계 성질'을 가지고 있다. 이 성질을 기술하기 위해서는 '최소상계'라는 개념을 도입해야 한다.

집합 E가 $\mathbb{R}$의 부분집합이라고 하자. 만약 m이 실수이고 E의 임의의 원소 x에 대하여 $x \le m$이 성립하면 m을 E의 **상계**(upper bound)라고 부른다. 즉 m이 E의 상계라는 것은

$$\forall x \in \mathbb{R} : (x \in E \to x \le m)$$

이 성립하는 것을 의미한다.

보기 1. 상계의 예를 살펴보자.

(1) $A = \{1, 2, 3\}$이라면, 3 이상인 실수가 모두 A의 상계이다.

(2) $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 2\}$라면, 2 이상인 실수가 모두 B의 상계이다.

(3) $C = \mathbb{Z}$라면, C의 상계는 존재하지 않는다.

E가 $\mathbb{R}$의 부분집합이라고 하자. 만약 E의 상계가 존재하면 "E가 **위로 유계**이다."라고 말한다.

보기 2. 앞의 보기 1에서 집합 A와 B는 위로 유계이다. 그러나 집합 C는 위로 유계가 아니다.

보기 3. 임의의 실수는 공집합의 상계이다. 이 사실을 증명해 보자.

m이 실수라고 하자. 그러면 조건부

$$x \in \varnothing \to x \le m \qquad \cdots ㉠$$

에서 x가 무엇이든 상관없이 가정 $x \in \varnothing$이 거짓이므로 ㉠이 항상 참이다. 그러므로

$$\forall x \in \mathbb{R} : (x \in \varnothing \to x \le m)$$

도 참이다.

2) 실수 집합은 실수의 모임에 불과하지만 실수계는 실수 집합에 덧셈, 곱셈, 순서 관계, 최소상계 성질로부터 얻어진 구조가 추가된 체계이다. '$\mathbb{R}$'라는 기호는 실수 집합을 나타내는 동시에 실수계를 나타낸다.

집합 E가 $\mathbb{R}$의 부분집합이라고 하자. 이때 집합 E의 상계 중 가장 작은 것을 E의 최소상계라고 부른다. 즉 s가 실수이고, 두 조건

- s가 E의 상계이다,
- s'이 E의 상계이면 $s \le s'$이다

를 모두 만족시키면, s를 E의 **최소상계**(least upper bound) 또는 E의 **상한**(supremum)이라고 부른다.

보기 4. 최소상계는 집합의 오른쪽 끝점과 같은 역할을 한다. 예컨대

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \le x \le 5\}$$

라면 A의 최댓값은 5이며, 이 값은 A의 최소상계이기도 하다. 한편

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 7\}$$

이라면 B는 최댓값을 갖지 않지만, B의 최소상계는 7이다.

집합 E의 상계가 존재할 때만 E의 최소상계를 생각할 수 있다. 즉 E가 위로 유계가 아닌 집합이라면 E의 상계가 존재하지 않으므로 E의 최소상계를 생각할 수 없다.

또한 E가 공집합이 아닐 때만 E의 최소상계를 생각할 수 있다. E가 공집합이라면 임의의 실수가 E의 상계가 되는데, 가장 작은 실수는 존재하지 않으므로 E의 최소상계가 존재하지 않는다.[3)]

그렇다면 집합 E가 위로 유계이고 공집합이 아니라면 E의 최소상계가 반드시 존재할까? 그에 대한 답은 다음과 같다.

최소상계 성질

E가 $\mathbb{R}$의 부분집합이고 공집합이 아니며 위로 유계이면, E의 최소상계가 $\mathbb{R}$에 존재한다.

설명 만약 유리수계를 바탕으로 실수계를 구성하였다면 최소상계 성질은 증명해야 할 대상, 즉 '정리'이다. 만약 몇 가지 약속을 통해 실수계를 '정의'한다면 최소상계 성질은 약속 중 하나이며 증명해야 할 대상이 아니므로 그냥 사용하면 된다. 이 책에서는 최소상계 성질을 '약속'이라고 받아들이고 사용하겠다. ■

이제 비로소 실수계를 정의할 수 있다:

"최소상계 성질을 갖는 순서체[4)]를 **실수계**라고 부른다."

최소상계 성질이 어떻게 유리수계와 실수계를 구분하는 역할을 하는지 예를 통해 살펴보자.

3) 책에 따라서는 위로 유계가 아닌 집합의 최소상계를 ∞라고 정의하기도 한다. 또한 책에 따라서는 공집합의 최소상계를 $-\infty$라고 정의하기도 한다.

4) 이와 같은 진술을 사용하여 실수계를 정의하려면 '최소상계 성질을 갖는 순서체'가 존재하는지, 그리고 그러한 순서체가 '유일하게' 존재하는지를 밝혀야 한다. 그러한 순서체가 '유일하게 존재'함이 밝혀져 있으나, 여기서 그 증명 과정을 소개하지는 않겠다.

보기 5. 유리수 집합은 최소상계 성질을 갖지 않는다. 예컨대 다음과 같은 집합을 생각해 보자.

$$E = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 2\}.$$

이 집합은 $\mathbb{Q}$의 부분집합이고 공집합이 아니며 위로 유계이다. 그러나 E의 최소상계가 $\mathbb{Q}$에 존재하지 않는다. 이 사실을 증명해 보자.

집합 E의 최소상계 m이 존재하고 $m \in \mathbb{Q}$라고 가정하자.

m이 유리수이므로 $m \neq \sqrt{2}$ 이다.[5] 그러므로 $\sqrt{2} < m$ 또는 $m < \sqrt{2}$ 이다.

만약 $\sqrt{2} < m$이라면, 유리수의 조밀성[6]에 의하여 $\sqrt{2} < q < m$인 유리수 q가 존재한다. 그런데 $q < x < m$인 원소 x가 E에 존재하지 않는다. 왜냐하면 $\sqrt{2} < q < x$일 때 $2 < x^2$이기 때문이다. 이것은 q가 E의 상계라는 뜻이므로, m이 E의 최소상계라는 데에 모순이다.

만약 $m < \sqrt{2}$ 라면, 유리수의 조밀성에 의하여 $m < x < \sqrt{2}$ 이면서 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ 인 유리수 x가 존재한다. 이때 x는 E의 원소이지만 $m < x$이므로, m이 E의 상계라는 데에 모순이다.

그러므로 E의 최소상계가 $\mathbb{Q}$에 존재하지 않는다.

상계와 최소상계를 정의한 것처럼 하계와 최대하계를 정의할 수 있다.

집합 E가 $\mathbb{R}$의 부분집합이라고 하자. 만약 b가 실수이고 E의 임의의 원소 x에 대하여 $b \leq x$가 성립하면 b를 E의 **하계**(lower bound)라고 부른다. 만약 E의 하계가 존재하면 "E가 **아래로 유계**이다."라고 말한다.

집합 E가 위로 유계이면서 아래로 유계일 때 "E가 **유계**(bounded)이다."라고 말한다.

집합 E가 $\mathbb{R}$의 부분집합이라고 하자. 그리고 s가 실수라고 하자. 만약 s가 두 조건

- s가 E의 하계이다,
- s'이 E의 하계이면 $s' \leq s$이다

를 모두 만족시키면 s를 E의 **최대하계**(greatest lower bound) 또는 **하한**(infimum)라고 부른다.

보기 6. 상계와 하계의 예를 살펴보자.

(1) $A = \{1, 2, 3\}$이라면, 1 이하인 모든 실수가 A의 하계이다. A의 최대하계는 1이다. A는 위로 유계이면서 아래로 유계이다. 즉 A는 유계이다.

(2) $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 2\}$라면, 0 이하인 모든 실수가 B의 하계이다. B의 최대하계는 0이다. B는 위로 유계이면서 아래로 유계이다. 즉 B는 유계이다.

(3) $C = \mathbb{Z}$ 라면, C는 위로 유계가 아니고 아래로 유계도 아니다. C의 상계와 하계 중 어느 것도 실수 범위에 존재하지 않는다.

(4) $D = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$이라면, D의 최대하계는 0이고 최소상계는 1이다. D는 유계이다.

(5) 공집합은 위로 유계이고 아래로도 유계이다. 즉 공집합은 유계이다. 그러나 공집합의 최소상계나 최대하계는 실수 범위에 존재하지 않는다.

(6) $E = \{(-2)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$이라면, E는 위로 유계가 아니고 아래로 유계도 아니다. E의 상계와 하계 중 어느 것도 실수 범위에 존재하지 않는다.

5) 사실은 $\sqrt{2}$가 실수 범위에 존재한다는 사실을 증명해야 한다. 이 사실은 4단원에서 증명한다.

6) 서로 다른 두 실수 사이에 반드시 유리수가 존재한다는 성질이다. 증명해 보자.

최소상계 성질을 사용하여 $\mathbb{R}$의 부분집합의 성질을 밝히는 예를 소개한다.

보기 7. 자연수 집합 $\mathbb{N}$은 위로 유계가 아니다. 이 사실을 증명해 보자.

$\mathbb{N}$이 위로 유계라고 가정하자. $\mathbb{N}$이 공집합이 아니므로 $\mathbb{N}$의 최소상계 m이 실수로서 존재한다. $m-1$은 m보다 작은 수이므로 $\mathbb{N}$의 상계가 될 수 없다. 그러므로 $m-1<n$인 자연수 n이 존재한다. $\mathbb{N}$이 덧셈에 대하여 닫혀있으므로 $n+1$도 자연수이다. 그런데 $m<n+1$이며, 이것은 m이 $\mathbb{N}$의 상계라는 데에 모순이다. 그러므로 $\mathbb{N}$은 위로 유계가 아니다.

2 자주 사용하는 집합

미적분학에서 자주 사용하는 집합을 살펴보자.

실수 구간

a와 b가 실수라고 하자. 이때 유계인 구간을 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}
[a,\ b] &= \{x\in\mathbb{R} \mid a \le x \le b\}, \\
(a,\ b) &= \{x\in\mathbb{R} \mid a < x < b\}, \\
[a,\ b) &= \{x\in\mathbb{R} \mid a \le x < b\}, \\
(a,\ b] &= \{x\in\mathbb{R} \mid a < x \le b\}.
\end{aligned}$$

a를 각 구간의 **왼쪽 끝점**, b를 각 구간의 **오른쪽 끝점**이라고 부른다.

$[a,\ b]$ 꼴의 구간을 **닫힌구간**(closed interval), $(a,\ b)$ 꼴의 구간을 **열린구간**(open interval)이라고 부른다. $[a,\ b)$ 꼴의 구간과 $(a,\ b]$ 꼴의 구간은 구분없이 **반닫힌구간** 또는 **반열린구간**이라고 부른다.7)

만약 $a \ge b$라면 세 구간 $(a,\ b)$, $[a,\ b)$, $(a,\ b]$는 모두 공집합이다. 만약 $a=b$라면 $[a,\ b]$는 원소가 하나인 집합이다. 만약 $a>b$라면 구간 $[a,\ b]$는 공집합이다.

만약 $a \le b$라면, 네 가지 형태의 구간의 **길이**를 모두 $b-a$라고 정의한다. 구간이 공집합이면 그 구간의 길이를 0이라고 정의한다.

한편 유계가 아닌 구간은 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}
(a,\ \infty) &= \{x\in\mathbb{R} \mid a < x\}, \\
[a,\ \infty) &= \{x\in\mathbb{R} \mid a \le x\}, \\
(-\infty,\ b) &= \{x\in\mathbb{R} \mid x < b\}, \\
(-\infty,\ b] &= \{x\in\mathbb{R} \mid x \le b\}, \\
(-\infty,\ \infty) &= \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

유계가 아닌 구간의 길이를 ∞라고 정의한다. 여기서 ∞는 실수가 아니지만, '길이가 양수인 구간'이라고 하면 유계가 아닌 구간도 함께 이르는 것으로 약속한다.

7) 열린구간을 나타내는 기호가 순서쌍을 나타내는 기호와 같으므로 혼동하지 않도록 유의해야 한다. $(a,\ b)$와 같은 기호를 보았을 때 이것이 열린구간을 나타내는지 아니면 순서쌍을 나타내는지는 문맥을 고려하여 판단해야 한다.

데카르트 곱

두 집합 A와 B의 **데카르트 곱**(Cartesian product) $A \times B$를 다음과 같이 정의한다.

$$A \times B = \{(x,\ y) \mid x \in A,\ y \in B\}.$$[8]

또한 세 집합 A, B, C의 **데카르트 곱** $A \times B \times C$를 다음과 같이 정의한다.

$$A \times B \times C = \{(x,\ y,\ z) \mid x \in A,\ y \in B,\ z \in C\}.$$

> **보기 8.** $A = \{1,\ 2,\ 3\}$, $B = \{4,\ 5\}$일 때 $A \times B$와 $B \times A$는 다음과 같다.
>
> $$A \times B = \{(1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5)\},$$
> $$B \times A = \{(4,\ 1),\ (5,\ 1),\ (4,\ 2),\ (5,\ 2),\ (4,\ 3),\ (5,\ 3)\}.$$
>
> 그러므로 $A \times B \neq B \times A$이다.

집합 $\mathbb{R}^2$와 $\mathbb{R}^3$를 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,\ y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\},$$
$$\mathbb{R}^3 = \{(x,\ y,\ z) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}\}.$$

집합 $\mathbb{R}^2$는 순서쌍 $(x,\ y)$의 집합이므로 좌표평면의 점의 집합이라고 생각할 수 있다. 또한 $\mathbb{R}^3$는 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 집합이므로 좌표공간의 점의 집합이라고 생각할 수 있다. 이러한 관점에서 $\mathbb{R}^2$를 **유클리드 평면**이라고 부르고, $\mathbb{R}^3$를 **유클리드 3차원 공간**이라고 부르기도 한다.

한편 $[a,\ b]$와 $[c,\ d]$가 구간일 때

$$[a,\ b] \times [c,\ d] = \{(x,\ y) \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$$

이므로 $[a,\ b] \times [c,\ d]$는 $\mathbb{R}^2$의 부분집합이며, 좌표평면에서 직사각형 영역이 된다.

합집합과 교집합

합 기호를 사용하여 여러 개의 수의 합을 간단하게 나타내는 것처럼, 여러 개의 집합의 합집합이나 교집합도 기호를 사용하여 간단하게 나타낼 수 있다.

A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_n이 집합일 때 다음과 같이 정의한다.

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n \quad \text{그리고} \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n\,.$$

만약 $I = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$이라면, 위 기호를 다음과 같이 더 간단하게 나타낼 수 있다.

$$\bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{그리고} \quad \bigcap_{i \in I} A_i\,.$$

> **보기 9.** $A_1 = \{1,\ 2\}$, $A_2 = \{2,\ 4\}$, $A_3 = \{2,\ 8\}$, $I = \{1,\ 2,\ 3\}$일 때
>
> $$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{3} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 8\},$$
> $$\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i=1}^{3} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{2\}.$$

8) 이 식에서 $(x,\ y)$는 순서쌍을 나타낸다.

연습문제

개념에 익숙해지기 위한 문제

1. E가 $\mathbb{R}$의 부분집합이라고 하자. 이때 'E의 최댓값'과 'E의 최소상계'의 차이를 설명하시오.

2. 다음 집합의 최소상계와 최대하계를 구하시오. (구한 값이 최소상계 또는 최대하계가 되는 이유를 설명하시오.)

   (1) $\{2, 5, 7, 9\}$ (2) $[-3, 8]$

   (3) $[4, 12)$ (4) $(-\sqrt{2}, 6]$

   (5) $(\pi, 7)$ (6) $(\pi, 7) \cap \mathbb{Q}$

   (7) $[\pi, 7) \setminus \mathbb{Q}$ (8) $\mathbb{N}$

3. $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 5\}$일 때 다음을 구하시오.

   (1) $A \times B$ (2) $B \times A$

   (3) $A \times A$ (4) $B \times B$

4. $A_i = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq i\}$일 때 다음을 구하시오.

   (1) $\bigcup_{i=1}^{4} A_i$ (2) $\bigcap_{i=1}^{4} A_i$

   (3) $\bigcup_{j=1}^{4} A_{2j}$ (4) $\bigcap_{k=1}^{4} A_{3k}$

   (5) $\bigcup_{k=1}^{3} \left(\bigcap_{i=1}^{k} A_{4-i} \right)$ (6) $\bigcap_{k=3}^{5} \left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j \right)$

5. 다음 집합의 최소상계와 최대하계를 구하시오. (구한 값이 최소상계 또는 최대하계가 되는 이유를 설명하시오.)

   (1) $\left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ (2) $\left\{ \frac{n}{n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$

   (3) $\left\{ \left(-\frac{1}{n} \right)^n \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ (4) $\left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$

6. $A_i = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq i\}$, $I = \{1, 2, 3\}$일 때 다음 집합의 원소의 수를 구하시오.

   (1) $A_2 \times A_3$ (2) $A_3 \times A_4$

   (3) $\bigcup_{k=1}^{3} (A_k \times A_{k+1})$ (4) $\bigcap_{k=1}^{3} (A_k \times A_{k+1})$

   (5) $\left(\bigcup_{k \in I} A_k \right) \times \left(\bigcup_{k \in I} A_{k+1} \right)$ (6) $\left(\bigcap_{k \in I} A_k \right) \times \left(\bigcap_{k \in I} A_{k+1} \right)$

개념을 다지기 위한 문제

7. a가 양수라고 하자. 이때 임의의 실수 b에 대하여, $na > b$인 자연수 n이 존재함을 보이시오.

   [자연수 집합이 위로 유계가 아니라는 성질을 사용한다.]

8. x가 실수라고 하자. 만약 임의의 양수 ϵ에 대하여 $|x| < \epsilon$이 성립하면, $x = 0$임을 보이시오.
[$x \neq 0$이라고 가정하고 모순을 끌어낸다.]

9. x와 y가 실수라고 하자. 만약 임의의 양수 ϵ에 대하여 $x < y + \epsilon$이 성립하면, $x \leq y$임을 보이시오.
[$x > y$라고 가정하고 모순을 끌어낸다.]

10. A와 B가 $\mathbb{R}$의 부분집합이고 $A \subset B$라고 하자. 만약 A가 위로 유계가 아니면, B도 위로 유계가 아님을 증명하시오. [대우를 증명한다.]

11. A와 B가 $\mathbb{R}$의 부분집합이고 공집합이 아니며 $A \subset B$라고 하자. 만약 B가 위로 유계이고 B의 최소상계가 b이면, A도 위로 유계이고 A의 최소상계가 b 이하임을 증명하시오.
[b가 A의 상계라는 사실을 증명하면 충분하다.]

12. 집합 A가 $\mathbb{R}$의 부분집합이고, 공집합이 아니며, 위로 유계라고 하자. 그리고 A의 최소상계를 a라고 하자. $B = \{-x \mid x \in A\}$일 때, B의 최대하계가 $-a$임을 증명하시오.
[먼저 B가 아래로 유계임을 보인다. 그 후 $-a$가 B의 최대하계임을 보인다.]

13. E가 $\mathbb{R}$의 부분집합이고 공집합이 아니며 아래로 유계라고 하자. 이때 E의 최대하계가 $\mathbb{R}$에 존재함을 보이시오. [실수계의 최소상계 성질과 바로 앞의 문제의 결과를 사용한다.]

14. E가 $\mathbb{R}$의 부분집합이고 공집합이 아니며 유한집합이라고 하자. 이때 E의 최댓값과 최솟값이 존재함을 증명하시오. [E의 원소의 개수를 n이라고 두고 수학적 귀납법을 사용한다.]

실력을 향상시키기 위한 문제

15. E가 $\mathbb{N}$의 부분집합이고 공집합이 아니며 아래로 유계라고 하자. 이때 E의 최솟값이 존재함을 증명하시오. [E가 공집합이 아니므로 E에 속하는 자연수 n이 존재한다. 그러므로 n에 대한 수학적 귀납법을 사용할 수 있다.]

16. 유리수의 조밀성을 증명하고자 한다. a와 b가 실수이고 $a < b$라고 하자. 다음 물음에 답하시오.
    (1) $(b-a)n > 1$인 자연수 n이 존재함을 보이시오.
    (2) $b > 0$일 때, $(b-a)n > 1$이면서 $(b-a)n \leq m$인 자연수 m과 n이 존재함을 보이시오.
    (3) $b > 0$일 때, a와 b 사이에 유리수가 존재함을 보이시오. [(2)에서 $(b-a)n \leq m$을 만족시키는 가장 작은 자연수 m을 택하면 $(m-1)/n$이 a와 b 사이에 있는 유리수가 된다.]
    (4) $b \leq 0$일 때도 a와 b 사이에 유리수가 존재함을 보이시오. [a와 b에 같은 유리수 r를 더하여 $b+r > 0$이 되도록 만든 뒤, $a+r$와 $b+r$ 사이에 존재하는 유리수를 찾는다.]

17. 무리수의 조밀성을 증명하고자 한다. a와 b가 실수이고 $a < b$라고 하자. 다음 물음에 답하시오.
    (1) $\sqrt{2}a$와 $\sqrt{2}b$ 사이에 0이 아닌 유리수가 존재함을 보이시오.
    (2) r가 0이 아닌 유리수일 때 $r/\sqrt{2}$가 무리수임을 보이시오.
    (3) a와 b 사이에 무리수가 존재함을 보이시오.

수학을 사랑하는 사람을 위한 문제

1. 군(group), 환(ring), 체(field)의 정의를 조사해 보자.

2. 순서체(ordered field)의 정의를 조사해 보자.

3. 유리수체(field of rational numbers)로부터 실수계를 구성하는 방법을 조사해 보자.

4. 벡터공간(vector space)의 정의를 조사하고, 다음을 보이시오.

   (1) 집합 $\mathbb{R}^2$의 원소 $\mathbf{x}=(x_1,\ x_2)$, $\mathbf{y}=(y_1,\ y_2)$와 실수 k에 대하여
   $$k\mathbf{x}=(kx_1,\ kx_2),$$
   $$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x_1+y_1,\ x_2+y_2)$$
   라고 정의할 때, 이 연산이 주어진 공간 $\mathbb{R}^2$는 $\mathbb{R}$ 위에서 벡터공간이다.

   (2) P가 차수가 2 이하이고 계수와 상수가 실수인 다항식들의 모임이라고 하자. P의 원소
   $$\mathbf{x}=a_0+a_1x+a_2x^2,\quad \mathbf{y}=b_0+b_1x+b_2x^2$$
   과 실수 k에 대하여
   $$k\mathbf{x}\ =ka_0+ka_1x+ka_2x^2,$$
   $$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2$$
   이라고 정의할 때, 이 연산이 주어진 공간 P는 $\mathbb{R}$ 위에서 벡터공간이다.

   (3) S가 실수열들의 모임이라고 하자. 실수열 $\mathbf{x}=\{x_n\}$, $\mathbf{y}=\{y_n\}$과 실수 k에 대하여
   $$k\mathbf{x}=\{kx_n\},$$
   $$\mathbf{x}+\mathbf{y}=\{x_n+y_n\}$$
   이라고 정의할 때, S는 $\mathbb{R}$ 위에서 벡터공간이다.

   (4) I가 길이가 양수인 열린구간이고, F가 정의역이 I이고 공역이 $\mathbb{R}$인 함수들의 모임이라고 하자. F의 원소 f, g와 실수 k에 대하여 kf와 $f+g$를
   $$\text{모든 } x\in I\text{에 대하여 } (kf)(x)=k(f(x)),$$
   $$\text{모든 } x\in I\text{에 대하여 } (f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
   인 함수로 정의할 때, 이 연산이 주어진 공간 F는 $\mathbb{R}$ 위에서 벡터공간이다.

5. I가 길이가 양수인 구간이고 f가 I에서 정의된 유계인 함수라고 하자. 이때 집합
   $$\{|f(x)|\mid x\in I\}$$
   의 최소상계를 f의 **상한노름**(supremum norm)이라고 부르고 $\|f\|_\infty$라고 나타낸다. 다음을 보이시오.

   (1) $\|f\|_\infty=0$이면, 모든 $x\in I$에 대하여 $f(x)=0$이다.

   (2) k가 실수이고 f가 I에서 정의된 유계인 함수일 때 $\|kf\|_\infty=|k|\|f\|_\infty$이다.

   (3) f와 g가 I에서 정의된 유계인 함수일 때 $\|f+g\|_\infty\le\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$이다.

영어로 표현하기 (실수계와 집합)

- ☐ A binary operation is a rule for combining two elements to produce another element. The addition and multiplication of real numbers are binary operations defined on the set of real numbers.

- ☐ An upper bound of a subset S of the set of real numbers $\mathbb{R}$ is an element of $\mathbb{R}$ that is greater than or equal to every element of S. A lower bound of a subset of S of the set of real numbers $\mathbb{R}$ is an element of $\mathbb{R}$ that is less than or equal to every element of S.

- ☐ Let S be a subset of the set of real numbers $\mathbb{R}$. The least upper bound of S is the least element in $\mathbb{R}$ that is greater than or equal to each element of S, if such an element exists. The greatest lower bound of S is the greatest element in $\mathbb{R}$ that is less than or equal to each element of S, if such an element exists. Consequently, the least upper bound and the greatest lower bound are also referred to as the supremum and the infimum.

- ☐ A set S of real numbers is called bounded from above if there exists some real number m such that $x \leq m$ for all x in S, that is, S is bounded above if there exists an upper bound of S. Similarly, a set S of real numbers is called bounded from below if there exists a lower bound of S. A set S is bounded if it has both upper and lower bounds. Therefore, a set of real numbers is bounded if it is contained in a finite interval.

- ☐ The least-upper-bound property (sometimes called completeness or supremum property) is a fundamental property of the real number system. The least-upper-bound property states that any non-empty set of real numbers that has an upper bound must have a least upper bound in real numbers. Not every number system has the least-upper-bound property. For example, the set $\mathbb{Q}$ of all rational numbers does not have the property.

- ☐ An interval is a set of real numbers that contains all real numbers lying between any two numbers of the set. Real intervals play an important role in the theory of integration, because they are the simplest sets whose 'length' is easy to define.

- ☐ An open interval does not include its endpoints, and is indicated with parentheses. A closed interval is an interval which includes all its limit points, and is denoted with square brackets. A half-open interval includes only one of its endpoints, and is denoted by mixing the notations for open and closed intervals.

- ☐ If an interval is bounded, then it has a finite length. The length of unbounded intervals is usually defined as ∞, and the length of the empty interval is defined as 0.

- ☐ The Cartesian product of two sets A and B, denoted $A \times B$, is the set of all ordered pairs $(x,\ y)$ where x is in A and y is in B. In terms of set-theoretic notation, that is $A \times B = \{(x,\ y) \mid x \in A \text{ and } y \in B\}$.

☐ The Cartesian product can be generalized to the ternary Cartesian product over 3 sets A, B, C as the set $A \times B \times C = \{(x, y, z) \mid x \in A, y \in B, \text{ and } z \in C\}$.

☐ The intersection of two sets A and B, denoted by $A \cap B$, is the set of containing all elements of A that also belong to B, or equivalently, all elements of B that also belong to A. In terms of set-theoretic notation, that is $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\}$. We say that A and B are disjoint if A does not intersect B, that is, if $A \cap B = \varnothing$.

☐ The union of two sets A and B, denoted by $A \cup B$, is the set of elements which are in A, in B, or in both A and B. In symbols, $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}$. If two sets A and B are disjoint, then the union $A \cup B$ is called a disjoint union.

☐ Find the infimum and supremum of each of the following sets.

☐ Prove that for each $a \in \mathbb{R}$ and each $n \in \mathbb{N}$ there exists a rational r_n such that $|a_n - r_n| < 1/n$.

☐ Prove that if a set $E \subset \mathbb{R}$ has a finite infimum m and ϵ is any positive number, then there is a point $a \in E$ such that $m + \epsilon > a \geq m$.

☐ A dyadic rational is a number of the form $k/2^n$ for some $k, n \in \mathbb{Z}$. Prove that if a and b are real numbers and $a < b$, then there exists a dyadic rational q such that $a < q < b$.

수열의 극한

아르키메데스[9]는 원에 내접하는 정다각형의 둘레와 원에 외접하는 정다각형의 둘레 길이를 구한 후 다각형의 꼭짓점의 개수를 늘려서 원주율의 근삿값을 구하였다. 이것은 오늘날의 관점에서 보면 수열의 극한의 조임 정리와 수열의 극한의 근삿값의 개념과 같다.

수열의 극한은 미적분학을 기반으로 하는 거의 모든 분야에서 사용되는 개념이다. 함수의 극한 개념은 수열의 극한 개념을 기초로 하며, 무한급수, 테일러 급수, 해석적 함수의 개념은 모두 수열의 극한의 개념에 바탕을 둔다. 따라서 수열의 극한은 미적분학을 공부하는 데에 기초가 되는 필수 개념이라 할 수 있다.

이 단원에서는 수열의 극한을 직관적으로 정의하고 그 성질을 살펴보자.

1 수열의 수렴과 발산

수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 일정한 실수 L에 한없이 가까워지면 "수열 $\{a_n\}$이 L에 **수렴한다**(converge to L)." 또는 "수열 $\{a_n\}$의 **극한이 존재한다**"라고 말한다. 이때 L을 수열 $\{a_n\}$의 **극한값** 또는 **극한**(limit)이라고 부르고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = L} \quad \text{또는} \quad \text{“}n \to \infty \text{ 일 때 } a_n \to L\text{”}$$

"리미트 n이 무한대로 갈 때 a n은 L"

보기 **1.** 수열의 극한의 예를 살펴보자.

(1) $a_n = \dfrac{n+1}{n}$일 때 $\{a_n\}$의 항을 나열하면

$$\frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{5},\ \frac{7}{6},\ \cdots$$

과 같이 1에 한없이 가까워지는 것을 확인할 수 있다. 따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$이다.

(2) $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$일 때 $\{b_n\}$의 항을 나열하면

$$-\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \cdots$$

과 같이 0에 한없이 가까워지는 것을 확인할 수 있다. 따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 0$이다.

(3) $c_n = 4$일 때 $\{c_n\}$은 상수수열이다. 이때 n의 값에 상관 없이 c_n은 항상 4와 같으므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 4 = 4$이다.

9) Αρχιμήδης, 기원전 287-212년 경, 고대 그리스의 철학자, 수학자, 천문학자, 물리학자 겸 공학자.

수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값도 한없이 커지면 "수열 $\{a_n\}$이 **양의 무한대로 발산한다**(diverge to ininity)."라고 말하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \infty} \quad \text{또는} \quad \text{"}n \to \infty\text{일 때 } a_n \to \infty\text{"}$$

"리미트 n이 무한대로 갈 때 a n은 무한대"

또 수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 한없이 작아지면 "수열 $\{a_n\}$이 **음의 무한대로 발산한다**(diverge to negative infinity)."라고 말하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty} \quad \text{또는} \quad \text{"}n \to \infty\text{일 때 } a_n \to -\infty\text{"}$$

"리미트 n이 무한대로 갈 때 a n은 마이너스 무한대"

수열 $\{a_n\}$이 수렴하지 않고 양의 무한대로 발산하지 않고 음의 무한대로 발산하지도 않을 때 "수열 $\{a_n\}$이 **진동한다**(oscillate)."라고 말한다.[10]

보기 2. 발산하는 수열의 극한의 예를 살펴보자.

(1) $a_n = n^2$일 때 $\{a_n\}$의 항을 나열하면

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ \cdots$$

와 같이 한없이 커지는 것을 확인할 수 있다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$이다.

(2) $b_n = -2^n$일 때 $\{b_n\}$의 항을 나열하면

$$-2,\ -4,\ -8,\ -16,\ -32,\ -64,\ -128,\ -256,\ \cdots$$

과 같이 한없이 작아지는 것을 확인할 수 있다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}(-2^n) = -\infty$이다.

(3) $c_n = (-1)^n$일 때 $\{c_n\}$의 항을 나열하면

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$$

과 같이, $\{c_n\}$이 수렴하지 않으면서 양의 무한대로 발산하지 않고 음의 무한대로 발산하지도 않음을 확인할 수 있다. 따라서 $\{c_n\}$은 진동한다.

(4) $d_n = (-2)^n$일 때 $\{d_n\}$의 항을 나열하면

$$-2,\ 4,\ -8,\ 16,\ -32,\ 64,\ -128,\ 256,\ \cdots$$

과 같다. 명백히 이 수열은 수렴하지 않는다.

한편 이 수열의 짝수 번째 항이 무한히 커지기는 하지만 홀수 번째 항이 무한히 커지지 않으므로 이 수열은 양의 무한대로 발산하지 않는다. 마찬가지로 이 수열의 홀수 번째 항이 무한히 작아지기는 하지만 짝수 번째 항이 무한히 작아지지 않으므로 이 수열은 음의 무한대로 발산하지도 않는다. 그러므로 $\{d_n\}$은 진동한다.

(5) $t_n = \sin n$일 때 $\{t_n\}$의 항 중에는 0.5보다 큰 것이 무한히 많고 -0.5보다 작은 것도 무한히 많다. 그러므로 $\{t_n\}$의 항은 하나의 값에 가까워지지 않는다. 한편 모든 자연수 n에 대하여 $-1 \le t_n \le 1$이므로 $\{t_n\}$은 양의 무한대로 발산하지 않고 음의 무한대로 발산하지도 않는다. 즉 $\{t_n\}$은 진동한다.

10) 수열의 극한이나 함수의 극한에서 '진동한다'라는 표현이 반드시 두 값 사이를 반복하여 오간다는 뜻은 아니다. 수렴하지 않고 양의 무한대로 발산하지 않고 음의 무한대로 발산하지도 않으면 모두 진동한다.

이 단원을 마칠 때까지 다음 극한 공식은 증명 없이 사용하기로 하자.[11]

수열의 극한 기본공식

(1) k가 상수일 때 $\lim_{n\to\infty} k = k$이다.

(2) $a_n = \dfrac{1}{n}$일 때 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.

(3) $b_n = n$일 때 $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$이다.

(4) $c_n = -n$일 때 $\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty$이다.

2 수열의 극한값 계산

수렴하는 수열의 극한은 다음과 같은 성질을 가진다.

정리 1. $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 수렴하는 수열이고 L과 M이 실수이며

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = M$$

이라고 하자. 이때 다음이 성립한다.

(1) k가 상수이면 $\{ka_n\}$은 수렴하는 수열이며 $\lim_{n\to\infty}(ka_n) = kL$이다.

(2) $\{a_n + b_n\}$은 수렴하는 수열이며 $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = L + M$이다.

(3) $\{a_n - b_n\}$은 수렴하는 수열이며 $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = L - M$이다.

(4) $\{a_n b_n\}$은 수렴하는 수열이며 $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = LM$이다.

(5) $M \neq 0$이고 모든 n에 대하여 $b_n \neq 0$일 때 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$은 수렴하는 수열이며 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{L}{M}$이다.

보기 3. 수열의 극한을 계산하는 예를 살펴보자.

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(5 + \dfrac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 5 + \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 5 + 0 = 5.$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{10}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} - 10\left(\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\right) = 0 - 10 \times 0 \times 0 = 0.$

(3)
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{3}{n^2}\right)\left(4 - \frac{3}{n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{3}{n^2}\right) \times \lim_{n\to\infty}\left(4 - \frac{3}{n}\right)\\ &= \left(\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}\right) \times \left(\lim_{n\to\infty} 4 - \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\right) = (1+0)\times(4-0) = 4.\end{aligned}$$

11) 엄밀한 증명은 3단원의 내용을 공부하면 할 수 있다.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{4}{n}}{5+\frac{3}{n^2}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{4}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{3}{n^2}\right)}=\frac{\lim_{n\to\infty}2-\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}}{\lim_{n\to\infty}5+\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}}=\frac{2-0}{5+0}=\frac{2}{5}.$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+3}{-2n^2+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{-2+\frac{4}{n^2}}=\frac{\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}}{\lim_{n\to\infty}(-2)+\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}}=\frac{1-0+0}{-2+0}=-\frac{1}{2}.$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n^4}\right)^5=\left\{\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n^4}\right)\right\}^5=(3-0)^5=3^5=243.$

발산하는 수열의 극한을 계산할 때는 다음 정리가 유용하다.

정리 2. $\{a_n\}$이 수렴하는 수열이고 $\{b_n\}$이 수열이며 L이 실수이고

$$\lim_{n\to\infty}a_n=L,\quad \lim_{n\to\infty}b_n=\infty$$

라고 하자. 이때 다음이 성립한다.

(1) 만약 $L>0$이면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\infty$이다.

(2) 만약 $L<0$이면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=-\infty$이다.

보기 4. 다음 수열의 수렴, 발산을 조사해 보자.

$$\left\{\frac{n^2-2n-1}{n+1}\right\}$$

이 수열의 일반항의 분자와 분모를 각각 분모의 최고차항인 n으로 나누면 다음과 같다.

$$\frac{n^2-2n-1}{n+1}=\frac{n-2-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=n\times\frac{1-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}.$$

여기서

$$\lim_{n\to\infty}n=\infty\quad \text{그리고}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}=1$$

이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n-1}{n+1}=\infty$이다.

보기 5. 다음 수열의 수렴, 발산을 조사해 보자.

$$\{-2n^2+n+1\}$$

일반항에서 n^2을 묶어내면 다음과 같다.

$$-2n^2+n+1=n^2\left(-2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

여기서

$$\lim_{n\to\infty} n^2=\infty \quad \text{그리고} \quad \lim_{n\to\infty}\left(-2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=-2$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}(-2n^2+n+1)=-\infty$이다.

수열의 극한의 대소 관계에 대한 다음과 같은 성질이 성립한다.

정리 3. $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 수렴하는 수열이고 L과 M이 실수이며

$$\lim_{n\to\infty} a_n=L, \quad \lim_{n\to\infty} b_n=M$$

이라고 하자. 이때 다음이 성립한다.

(1) 유한 개를 제외한 모든 항번호 n에 대하여 $a_n\le b_n$이면 $L\le M$이다.

(2) $\{c_n\}$이 실수열이고 유한 개를 제외한 모든 항번호 n에 대하여 $a_n\le c_n\le b_n$이며 $L=M$이면, $\{c_n\}$은 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} c_n=L$이다. 이 정리를 **조임 정리**(squeeze theorem)라고 부른다.

조임 정리를 사용하여 수열의 극한을 구하는 예를 살펴보자.

보기 6. $\{a_n\}$이 실수열이고 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{2n}{n+1}\le a_n\le\frac{2n+1}{n+1}$$

을 만족시킨다고 하자. 이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=2$$

이므로 조임 정리에 의하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=2$이다.

보기 7. 수렴하는 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 항번호 n에 대하여 $a_n<b_n$을 만족시킨다고 해서 반드시 $\lim_{n\to\infty} a_n<\lim_{n\to\infty} b_n$이 성립하는 것은 아니다.

예를 들어 $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{2}{n}$라고 하면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<b_n$이지만

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=0$$

이다.

정리 3의 (2)는 발산하는 수열에 대해서도 사용할 수 있다.

정리 4. $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 실수열이고, 유한 개를 제외한 모든 항번호 n에 대하여 $a_n \le b_n$을 만족시킨다고 하자. 이때 다음이 성립한다.

(1) 만약 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$이면, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$이다.

(2) 만약 $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$이면, $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$이다.

보기 8. 다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$의 수렴, 발산을 조사해 보자.

$$a_n = n(2+\sin n).$$

임의의 자연수 n에 대하여 $-1 \le \sin n \le 1$이므로 $2+\sin n \ge 1$이다. 즉

$$n(2+\sin n) \ge n \times 1 = n$$

이다. 그런데 $\lim_{n\to\infty} n = \infty$이므로 $\lim_{n\to\infty} n(2+\sin n) = \infty$이다.

3 등비수열의 극한

등비수열 $\{r^n\}$의 수렴, 발산은 공비 r의 값에 따라 달라진다.

(i) $r > 1$일 때 $r = 1+h$로 두면 $h > 0$이고, 베르누이 부등식에 의하여

$$r^n = (1+h)^n \ge 1+nh$$

가 성립한다. 이때 $\lim_{n\to\infty}(1+nh) = \infty$이므로 정리 4에 의하여 $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$이다.

(ii) $r = 1$일 때 수열 $\{r^n\}$의 모든 항이 1이므로 $\lim_{n\to\infty} r^n = 1$이다.

(iii) $r = 0$일 때 수열 $\{r^n\}$의 모든 항이 0이므로 $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$이다.

(iv) $|r| < 1$이고 $r \ne 0$일 때 $|r| = \dfrac{1}{1+h}$로 두면 $h > 0$이고, 베르누이 부등식에 의하여

$$0 \le |r|^n = \left(\frac{1}{1+h}\right)^n = \frac{1}{(1+h)^n} \le \frac{1}{1+nh}$$

이다. 이때 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+nh} = 0$이므로 $\lim_{n\to\infty} |r|^n = 0$이다. 한편

$$-|r|^n \le r^n \le |r|^n$$

이므로 $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$이다.

(v) $r = -1$일 때 수열 $\{r^n\}$의 항이 -1과 1이 번갈아 나타나므로, $\{r^n\}$은 진동한다.

(vi) $r<-1$일 때 $|r|>1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}|r^n|=\lim_{n\to\infty}|r|^n=\infty$$

이다. 이때 수열 $\{r^n\}$의 각 항의 부호가 교대로 변하면서 그 절댓값이 커지므로, $\{r^n\}$은 진동한다.

지금까지 살펴본 내용을 정리하면 다음과 같다.

정리 5. 등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하기 위한 필요충분조건은 $-1<r\le 1$인 것이다. 이때 r의 값에 따른 수열 $\{r^n\}$의 극한은 다음과 같다.

(1) $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$.

(2) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=1$.

(3) $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=0$.

(4) $r\le -1$일 때, 수열 $\{r^n\}$은 진동한다.

보기 9. 다음 수열의 극한을 구해 보자.

$$\left\{\frac{2^{n+1}}{3^n+4}\right\}$$

일반항의 분모와 분자를 각각 3^n으로 나눈 뒤 극한을 계산하면 다음과 같다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{3^n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n\times 2}{1+\frac{4}{3^n}}=\frac{0\times 2}{1+0}=0.$$

보기 10. 다음 수열의 극한을 구해 보자.

$$\left\{\frac{4^n-2^n}{3^n+2^n}\right\}$$

일반항을 변형하면 다음과 같다.

$$\frac{4^n-2^n}{3^n+2^n}=\left(\frac{4}{3}\right)^n\times\frac{1-\left(\frac{2}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

그런데

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n=\infty \quad 그리고 \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=1$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{4^n-2^n}{3^n+2^n}=\infty$이다.

연습문제

개념에 익숙해지기 위한 문제

1. 다음 극한이 수렴하는지 판별하시오. 만약 수렴한다면 극한을 구하시오.

(1) $\lim_{n \to \infty} \frac{2n^2 - n}{n^2 + n + 4}$ (2) $\lim_{n \to \infty} \frac{-n+3}{n^2 - n + 4}$

(3) $\lim_{n \to \infty} \frac{6n^2 + 3n - 1}{(n+2)(n+3)}$ (4) $\lim_{n \to \infty} \frac{n^3 - 3n + 1}{2n^2 + 1}$

(5) $\lim_{n \to \infty} (-n^2 + 5n - 2)$ (6) $\lim_{n \to \infty} \frac{-n^2 + n}{2n^2 + 3n - 4}$

(7) $\lim_{n \to \infty} \frac{4n^3 - 5n + 2}{n - 2n^3}$ (8) $\lim_{n \to \infty} \frac{n^5 + n^2}{1 - 2n + 4n^2 - 6n^3}$

(9) $\lim_{n \to \infty} \frac{n^3 - 7n^2 + 9n}{1 - n^4}$ (10) $\lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{3n-1}{n^2+1} \times (-1)^n \right\}$

2. 다음 수열이 수렴하는지 판별하시오. 만약 수렴한다면 극한을 구하시오.

(1) $\left\{ \frac{5^n + 1}{3^n} \right\}$ (2) $\left\{ \frac{4^{n+1}}{4^n - 3^n} \right\}$

3. $a_n = (2x-1)^n$일 때 수열 $\{a_n\}$이 수렴하도록 하는 x의 값의 범위를 구하시오.

4. 수열 $\{r^{2n}\}$이 수렴할 때, 수열 $\left\{ \left(\frac{r-1}{3} \right)^n \right\}$이 수렴하는지 판별하시오.

5. 다음 수열이 수렴하도록 하는 x의 값의 범위를 구하시오.

$$\{(x-4)(x^2-3)^{n-1}\}$$

6. $\{a_n\}$이 실수열이고, 임의의 자연수 n에 대하여 $n < a_n < n+2$를 만족시킨다. 이때 다음 극한을 구하시오.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}$$

개념을 다지기 위한 문제

7. 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 0 이상이라고 하자. 또한 $\{a_n\}$이 실수에 수렴하고

$$\lim_{n \to \infty} ({a_n}^2 - a_n - 5) = 7$$

을 만족시킨다. 이때 $\{a_n\}$의 극한을 구하시오.

8. $\{a_n\}$이 실수열이고 $\lim_{n \to \infty} (n^2+1)a_n = 3$이 성립할 때, 다음 극한을 구하시오.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{(4n^2-1)a_n}$$

9. n이 자연수일 때 x에 대한 방정식

$$x^2+(2n^2+n)x-n^2=0$$

의 서로 다른 두 근을 각각 α_n, β_n이라고 하자. 이때 다음 극한을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$$

10. a와 b가 상수이고 다음이 성립한다고 하자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn-3}{4n+1}=3$$

이때 a와 b의 값을 구하시오.

11. $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 0이 아닌 항으로 이루어진 수열이고 다음을 만족시킨다.

$$\lim_{n\to\infty}(2n^2-1)a_n=3 \quad \text{그리고} \quad \lim_{n\to\infty}(n+1)b_n=5.$$

이때 다음 극한을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{(3n+1)a_n}$$

12. n이 자연수일 때, 원 $x^2+y^2=n^2$에 접하고 점 $(2n,\ 0)$을 지나는 두 직선 중 y절편이 양수인 직선의 y절편을 a_n이라고 하자. 이때 다음 극한을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n+1}$$

13. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 다음과 같이 정의되어 있다고 하자.

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x+1}{x^{2n}+2}$$

이때 $f(-1)f\left(\frac{1}{2}\right)f(2)$를 구하시오.

14. n이 자연수일 때, 중심이 $(4n,\ 3n)$이고 x축에 접하는 원을 O_n이라고 하고, 중심이 $(-1,\ 0)$이고 y축에 접하는 원을 C라고 하자. 원 O_n 위의 점과 원 C 위의 점 사이의 거리의 최댓값을 a_n, 최솟값을 b_n이라고 하자. 이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$을 구하시오.

실력을 향상시키기 위한 문제

15. x_1, x_2, x_3이 양수일 때 다음 극한을 구하시오.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{{x_1}^n+{x_2}^n}{2}\right)^{1/n}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{{x_1}^n+{x_2}^n+{x_3}^n}{3}\right)^{1/n}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{{x_1}^{-n}+{x_2}^{-n}}{2}\right)^{-1/n}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{{x_1}^{-n}+{x_2}^{-n}+{x_3}^{-n}}{3}\right)^{-1/n}$

16. r가 실수라고 하자. 이때 다음 네 조건을 모두 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 존재함을 보이시오.

(i) $\{a_n\}$이 유리수열이다.

(ii) $\{a_n\}$이 순증가수열이다.

(iii) $\{a_n\}$이 r에 수렴한다.

(iv) 임의의 자연수 n에 대하여 $a_n \neq r$이다.

17. r가 실수라고 하자. 이때 다음 네 조건을 모두 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 존재함을 보이시오.

(i) $\{a_n\}$이 무리수열이다.

(ii) $\{a_n\}$이 순감소수열이다.

(iii) $\{a_n\}$이 r에 수렴한다.

(iv) 임의의 자연수 n에 대하여 $a_n \neq r$이다.

수학을 사랑하는 사람을 위한 문제

1. S가 수렴하는 실수열의 모임이라고 하자. 실수열 $\mathbf{x} = \{x_n\}$과 $\mathbf{y} = \{y_n\}$, 실수 k에 대하여 다음과 같이 정의한다.

$$k\mathbf{x} = \{kx_n\}, \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} = \{x_n + y_n\}.$$

다음 물음에 답하시오.

(1) 이 연산이 주어진 공간 S가 $\mathbb{R}$ 위에서 벡터공간임을 보이시오.

(2) $\phi(\mathbf{x}) = \lim_{n \to \infty} x_n$이라고 할 때 ϕ가 S로부터 $\mathbb{R}$로의 선형변환임을 보이시오.

2. $\{a_n\}$이 수열이라고 하자. 만약 양수 B가 존재하여 임의의 n에 대하여 $|a_n| \leq B$를 만족시키면, "$\{a_n\}$이 유계이다."라고 말한다. 앞의 문제 1에서 S를 유계인 실수열의 모임으로 바꾸어 문제 (1)을 해결하시오.

두 번째 이야기

함수의 극한

수열의 항이 하나의 값에 한없이 가까워지는 개념으로서 수열의 극한을 생각한 것처럼 함숫값이 하나의 값에 한없이 가까워지는 개념으로서 함수의 극한을 생각할 수 있다. 함수 $y=f(x)$의 극한은 x가 하나의 값 a에 가까워지는 극한뿐만 아니라 x의 값이 한없이 커지거나 한없이 작아지는 극한, x가 a의 왼쪽에서 a에 다가가거나 a의 오른쪽에서 a에 다가가는 극한 등 다양한 형태의 극한을 생각할 수 있다.

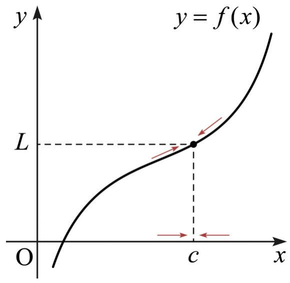
이 단원에서는 함수의 극한을 직관적으로 정의하고 그 성질을 살펴보자.

1 함수의 수렴과 발산

함수 f에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 "함수 $f(x)$가 L에 **수렴한다**." 또는 "a에서 f의 극한이 존재한다."라고 말한다. 이때 L을 $x=a$에서 f의 **극한값** 또는 **극한**이라고 부르고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L}$ 또는 "$x \to a$일 때 $f(x) \to L$"

"리미트 x가 a로 갈 때 f x는 L"



보기 1. 함수 $f(x)=x^2-2$를 생각하자. 이 함수는 3을 원소로 갖는 구간에서 정의되어 있다. x의 값이 3에 가까워지면 $f(x)$의 값은 7에 가까워진다. 그러므로 3에서 f의 극한값은 7이다. 즉

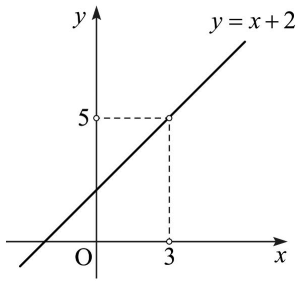
$$\lim_{x \to 3}(x^2-2)=7$$

이다.

보기 2. 함수 f가

$$f(x)=\frac{x^2-x-6}{x-3}$$

이라고 주어졌다고 하자. 비록 $x=3$일 때 $f(x)$가 정의되지 않지만 f는 3의 주변에서 정의되므로 $x \to 3$일 때 f의 극한값을 생각할 수 있다.[12] $x \neq 3$일 때



$$f(x)=\frac{x^2-x-6}{x-3}=\frac{(x-3)(x+2)}{x-3}=x+2$$

이므로 $x \neq 3$이면서 x가 3에 다가갈 때 $f(x)$의 값이 5에 다가간다. 그러므로

$$\lim_{x \to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3}=5$$

이다.

12) "극한값을 생각할 수 있다."라는 말이 "극한이 존재한다."라는 뜻은 아니다.

위 보기에서 보다시피 어떤 점에서 함숫값이 존재하지 않더라도 그 점에서 극한값이 존재할 수 있다.

참고 함수의 극한의 정의에서 'x의 값이 a에 가까워진다'라는 표현이 있으므로, f의 정의역의 점이 a 주변에 있을 때만 a에서 f의 극한이 정의된다. 예컨대 무리함수 $f(x)=\sqrt{x}$는 x가 음수일 때 정의되지 않는다. 그러므로 이 함수에 대해서는

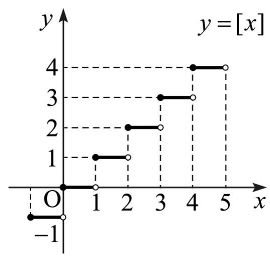
$$\lim_{x\to-3} f(x)$$

와 같은 극한을 생각하지 않는다. 또한, 만약 함수 g가 정수인 점에서만 정의된다면

$$\lim_{x\to2} g(x)$$

와 같은 극한을 생각하지 않는다. 왜냐하면 x의 값이 2와 일치하지 않으면서 2에 다가갈 수 없기 때문이다. □[13]

보기 **3.** $f(x)=[x]$라고 하자. 여기서 $[\cdot]$는 **최대정수함수**(greatest integer function)를 나타낸다.[14]



x의 값이 2에 가까워질 때 $f(x)$의 값은 1에 가까워지기도 하고 2에 가까워지기도 한다. x가 2보다 작으면서 2에 가까워지면 $f(x)$의 값은 1에 가까워지며(사실은 $f(x)=1$인 상태가 되며), x가 2보다 크면서 2에 가까워지면 $f(x)$의 값은 2에 가까워진다.

그러므로 x의 값이 2에 가까워질 때 $f(x)$의 값은 '하나의' 값에 가까워지지 않는다. 즉 $x\to2$일 때 f의 극한은 존재하지 않는다.

보기 3과 같이 $x\to a$일 때 f의 극한이 존재하지 않는 경우 "a에서 f가 **발산한다**." 또는 "a에서 f의 **극한이 존재하지 않는다**."라고 말한다.[15]

수열의 발산을 몇 가지 형태로 구분한 것처럼 함수의 발산도 몇 가지 형태로 구분할 수 있다.

함수 f에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값이 한없이 커지면 "a에서 $f(x)$가 **양의 무한대로 발산한다**."라고 말하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \quad \text{또는} \quad \text{“}x\to a\text{일 때 } f(x)\to\infty\text{”}$$

또 함수 f에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 한없이 작아지면 "a에서 $f(x)$가 **음의 무한대로 발산한다**."라고 말하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty \quad \text{또는} \quad \text{“}x\to a\text{일 때 } f(x)\to-\infty\text{”}$$

a에서 함수 f가 수렴하지 않고 양의 무한대로 발산하지 않고 음의 무한대로 발산하지도 않으면 "a에서 $f(x)$가 **진동한다**."라고 말한다.

---

13) 눈치챘겠지만 이 책에서 문단 끝에 붙은 네모 표시 '□'는 설명이 끝났음을 나타낸다.

14) 즉 $[x]$는 x 이하의 정수 중 가장 큰 값을 나타낸다. 최대정수함수를 '가우스 함수'라고 부르기도 한다. 최대정수함수는 $\lfloor x \rfloor$와 같이 나타내는 게 맞지만, 이 책에서는 $[x]$로 나타내기도 한다.

15) 함숫값이 무한히 커지거나 무한히 작아지지 않더라도, 수렴하지 않는 모든 경우를 통틀어 '발산한다'라고 말한다.

보기 **4.** 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하는 함수의 극한의 예를 살펴보자.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$일 때 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$이다.

(2) $g(x)=-\dfrac{1}{x^2}$일 때 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$이다.

보기 **5.** $h(x)=\dfrac{1}{x}$이라고 하자. $x>0$이면서 x가 0에 한없이 가까워지면 $h(x)$의 값은 한없이 커진다. 반면 $x<0$이면서 x가 0에 한없이 가까워지면 $h(x)$의 값은 한없이 작아진다. 그러므로 0에서 h는 수렴하지 않고 양의 무한대에 발산하지 않고 음의 무한대에 발산하지도 않는다. 즉 0에서 $h(x)$는 진동한다.

수열 $\{a_n\}$의 극한에서 n의 값이 한없이 커질 때를 생각한 것처럼 함수 f의 극한에서도 x의 값이 한없이 커지거나 한없이 작아질 때 함숫값 $f(x)$의 움직임을 생각할 수 있다.

함수 f에서 x의 값이 한없이 커질 때 $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 "양의 무한대에서 $f(x)$가 L에 **수렴**한다."라고 말하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L \quad \text{또는} \quad \text{“}x\to\infty \text{일 때 } f(x)\to L\text{”}$$

또 함수 f에서 x의 값이 한없이 작아질 때 $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 "음의 무한대에서 $f(x)$가 L에 **수렴**한다."라고 말하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=L \quad \text{또는} \quad \text{“}x\to-\infty \text{일 때 } f(x)\to L\text{”}$$

함수 f에서 $x\to\infty$ 또는 $x\to-\infty$일 때, $f(x)$의 값이 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하는 것을 각각 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

함수 f에서 $x\to\infty$ 또는 $x\to-\infty$일 때 $f(x)$의 값이 수렴하지 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으면, 각 경우를 "양의 무한대에서 $f(x)$가 **진동**한다." 그리고 "음의 무한대에서 $f(x)$가 **진동**한다."라고 말한다.

보기 **6.** 양의 무한대에서의 극한과 음의 무한대에서의 극한의 예를 살펴보자.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$일 때 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$이고 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$이다.

(2) $g(x)=x^3$일 때 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$이고 $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$이다.

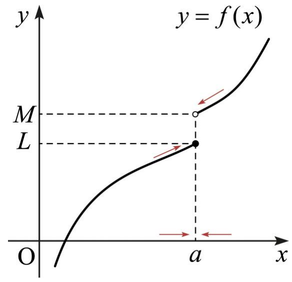
(3) $h(x)=x^2$일 때 $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=\infty$이고 $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\infty$이다.

(4) $f(x)=[x]$일 때 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$이고 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$이다.

(5) $g(x)=x-[x]$라고 하자. $x\to\infty$일 때 $g(x)$는 진동하며, $x\to-\infty$일 때도 $g(x)$는 진동한다.

(6) $h(x)=\sin x$라고 하자. $x\to\infty$일 때 $h(x)$는 진동하며, $x\to-\infty$일 때도 $h(x)$는 진동한다.

x의 값이 a보다 작으면서 a에 한없이 가까워지는 것을 기호로 $x \to a-$와 같이 나타내고, x의 값이 a보다 크면서 a에 한없이 가까워지는 것을 기호로 $x \to a+$와 같이 나타낸다.



함수 f에서 $x \to a-$일 때 $f(x)$의 값이 L에 한없이 가까워지면 L을 $x=a$에서 함수 f의 **좌극한**(left-hand limit)이라고 부르고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\boxed{\lim_{x \to a-} f(x) = L} \quad \text{또는} \quad \text{“}x \to a-\text{일 때 } f(x) \to L\text{”}$$

“리미트 x가 a의 왼쪽에서 a로 갈 때 f x는 L”

또 함수 f에서 $x \to a+$일 때 $f(x)$의 값이 M에 한없이 가까워지면 M을 $x=a$에서 함수 f의 **우극한**(right-hand limit)이라고 부르고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \to a+} f(x) = M \quad \text{또는} \quad \text{“}x \to a+\text{일 때 } f(x) \to M\text{”}$$

함수 f의 극한

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

에서 기호 ‘$x \to a$’는 x의 값이 a에 한없이 가까이 다가감을 뜻한다. 이때 a에 다가가는 방향에 상관없이 $f(x)$의 값은 L에 가까워진다. 그러므로 “$x \to a$일 때 $f(x) \to L$”이 성립하려면 $x \to a-$일 때에도 $f(x) \to L$이고 $x \to a+$일 때에도 $f(x) \to L$이어야 한다.

정리 1. 함수 f가 a의 주변에서 정의되어 있고 L이 실수라고 하자. 이때

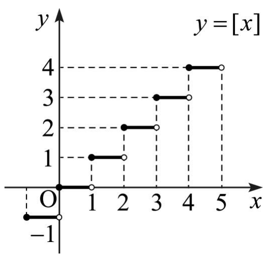
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

이기 위한 필요충분조건은

$$\lim_{x \to a+} f(x) = L \quad \text{그리고} \quad \lim_{x \to a-} f(x) = L$$

이 모두 성립하는 것이다.

보기 7. 앞의 보기 3에서 살펴본 최대정수함수 $f(x) = [x]$를 다시 살펴보자. x가 2보다 작으면서 2에 가까워지면 $f(x)$의 값은 1에 가까워지며, x가 2보다 크면서 2에 가까워지면 $f(x)$의 값은 2에 가까워진다. 그러므로 2에서 f의 좌극한은 1이며, 2에서 f의 우극한은 2이다.



일반적으로, 만약 n이 정수라면 n에서 f의 좌극한은 $(n-1)$이고 f의 우극한은 n이다. 즉 n에서 f의 좌극한과 우극한은 각각 존재하지만, n에서 f의 극한은 존재하지 않는다.

만약 a가 정수가 아니라면, a에서 f의 좌극한과 우극한은 일치하며 그 값은 $[a]$이다. 즉 정수가 아닌 점 a에서 f의 극한이 존재한다.

2 함수의 극한값 계산

이 단원을 마칠 때까지 다음 극한 공식은 증명하지 않고 사용하기로 하자.

함수의 극한 기본공식

(1) k가 상수일 때 $\lim\limits_{x \to a} k = k$이다.

(2) $f(x) = x$일 때 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$이다.

(3) $g(x) = \dfrac{1}{x}$일 때 $\lim\limits_{x \to 0+} g(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to 0-} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$이다.

일반적으로 수렴하는 함수의 극한에 대하여 다음이 성립한다.

정리 2. 두 함수 f, g가 $x \to a$일 때 수렴하고 L과 M이 실수이며

$$\lim_{x \to a} f(x) = L, \quad \lim_{x \to a} g(x) = M$$

이라고 하자. 이때 다음이 성립한다.

(1) k가 상수이면 함수 kf가 a에서 수렴하며 $\lim\limits_{x \to a} kf(x) = kL$이다.

(2) 함수 $f+g$가 a에서 수렴하며 $\lim\limits_{x \to a} \{f(x)+g(x)\} = L+M$이다.

(3) 함수 $f-g$가 a에서 수렴하며 $\lim\limits_{x \to a} \{f(x)-g(x)\} = L-M$이다.

(4) 함수 fg가 a에서 수렴하며 $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = LM$이다.

(5) $M \neq 0$이고 a의 주변에서 $g(x) \neq 0$일 때, 함수 f/g가 a에서 수렴하며 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$이다.

참고 위 성질은 $x \to a+$, $x \to a-$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$일 때도 성립한다.

참고 정리 2의 (2)~(5)는 두 극한이 모두 수렴할 때, 즉 L과 M이 실수일 때만 사용할 수 있다. 예컨대

$$f(x) = x, \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

일 때

$$\lim_{x \to 0} (f(x)g(x)) = \left(\lim_{x \to 0} f(x)\right)\left(\lim_{x \to 0} g(x)\right) = 0 \times \left(\lim_{x \to 0} g(x)\right) = 0$$

이라고 계산하면 안 된다. □

보기 8. 함수의 극한을 계산하는 예를 살펴보자.

(1) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 2x + 3) = \lim\limits_{x \to 2} x^2 - \lim\limits_{x \to 2} 2x + \lim\limits_{x \to 2} 3$

$$= \left(\lim_{x \to 2} x\right) \times \left(\lim_{x \to 2} x\right) - 2 \times \left(\lim_{x \to 2} x\right) + \lim_{x \to 2} 3 = 2 \times 2 - 2 \times 2 + 3 = 3.$$

(2) $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - x + 1}{x + 1} = \frac{\lim_{x \to -3}(x^2 - x + 1)}{\lim_{x \to -3}(x + 1)} = \frac{(-3)^2 - (-3) + 1}{(-3) + 1} = -\frac{13}{2}$.

보기 9. f가 다항함수이고 a가 실수일 때 다음 극한을 증명해 보자.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad \cdots ㉠$$

만약 f가 상수함수이고 $f(x) = k$라면

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} k = k = f(a)$$

이므로 ㉠이 성립한다. 또한 f가 일차함수이고 $f(x) = a_1 x + a_0$이라면

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a}(a_1 x + a_0) = \lim_{x \to a} a_1 x + \lim_{x \to a} a_0 = a_1 a + a_0 = f(a)$$

이므로 ㉠이 성립한다.

이제 k가 자연수이고 차수가 k 이하인 임의의 다항함수 f_k에 대하여 ㉠이 성립한다고 가정하자. f가 $k+1$차 다항함수이고

$$f(x) = a_{k+1} x^{k+1} + a_k x^k + \cdots + a_1 x^1 + a_0$$

이라고 하자. $f_k(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x^1 + a_0$이라고 하면 f_k는 차수가 k 이하인 다항함수이고

$$f(x) = a_{k+1} x^{k+1} + f_k(x)$$

와 같이 나타낼 수 있다. 이때

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a}\left\{a_{k+1} x^{k+1} + f_k(x)\right\} = \lim_{x \to a} a_{k+1} x^{k+1} + \lim_{x \to a} f_k(x) \\ &= a_{k+1} \times \left(\lim_{x \to a} x\right) \times \left(\lim_{x \to a} x^k\right) + \lim_{x \to a} f_k(x) = a_{k+1} \times a \times a^{k+1} + f_k(a) \\ &= a_{k+1} a^{k+1} + a_k a^k + \cdots + a_1 a + a_0 = f(a)\end{aligned}$$

이므로 $k+1$차 다항함수 f에 대해서도 ㉠이 성립한다.

따라서 수학적 귀납법에 의하여 임의의 다항함수 f에 대하여 ㉠이 성립한다.

보기 10. 다음 등식을 만족시키는 상수 a, b의 값을 구해 보자.

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 + ax + b}{x - 2} = 3$$

위 식에서 분모의 극한이 $\lim_{x \to 2}(x - 2) = 0$이므로 분자의 극한도 $\lim_{x \to 2}(2x^2 + ax + b) = 0$이다.

즉 $8 + 2a + b = 0$이므로 $b = -2a - 8$이다. 이 식을 문제의 등식에 대입하면

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 + ax - 2a - 8}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(2x + a + 4)}{x - 2} = \lim_{x \to 2}(2x + a + 4) = a + 8$$

이다. 즉 $a + 8 = 3$이므로 $a = -5$이다. 또한 $b = -2a - 8 = 2$이다.

발산하는 함수의 극한을 계산할 때는 다음 정리가 유용하다.

정리 3. f가 a에서 수렴하는 함수이고 g가 함수이며 L이 실수이고

$$\lim_{x \to a} f(x) = L, \quad \lim_{x \to a} g(x) = \infty$$

라고 하자. 이때 다음이 성립한다.

(1) 만약 $L > 0$이면 $\lim_{x \to a}(f(x)g(x)) = \infty$이다.

(2) 만약 $L < 0$이면 $\lim_{x \to a}(f(x)g(x)) = -\infty$이다.

참고 위 성질은 $x \to a+$, $x \to a-$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$일 때도 성립한다.

보기 11. $x \to 0$일 때 다음과 같이 정의된 함수 f의 수렴, 발산을 조사해 보자.

$$f(x) = \frac{x^2+x-3}{x^2}$$

$f(x)$의 식을 변형하면

$$\frac{x^2+x+3}{x^2} = \frac{1}{x^2} \times (x^2+x-3)$$

이다. 여기서

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty \quad \text{그리고} \quad \lim_{x \to 0}(x^2+x-3) = -3$$

이므로 $\lim_{x \to 0} \frac{x^2+x-3}{x^2} = -\infty$이다.

보기 12. $x \to -\infty$일 때 다음과 같이 정의된 함수 f의 수렴, 발산을 조사해 보자.

$$f(x) = -2x^2+x+1$$

$x \to -\infty$인 극한을 생각해야 하므로 $x < 0$일 때만 살펴봐도 충분하다.

$x < 0$일 때 $f(x)$의 식을 변형하면 다음과 같다.

$$-2x^2+x+1 = x^2\left(-2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right).$$

여기서

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = \infty \quad \text{그리고} \quad \lim_{x \to -\infty}\left(-2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = -2$$

이므로 $\lim_{x \to -\infty}(-2x^2+x+1) = -\infty$이다.

수열의 극한을 구할 때 조임 정리를 사용한 것처럼 함수의 극한을 구할 때도 조임 정리를 사용할 수 있다.

정리 4. 두 함수 f와 g가 $x \to a$일 때 수렴하고 L과 M이 실수이며

$$\lim_{x \to a} f(x) = L, \quad \lim_{x \to a} g(x) = M$$

이라고 하자.

(1) 만약 a가 아니면서 a에 가까운 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \leq g(x)$이면 $L \leq M$이다.

(2) 함수 h가 a 근처에서 정의되어 있고 a가 아니면서 a에 가까운 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$이며 $L = M$이라고 하자. 그러면 $x \to a$일 때 $h(x)$가 수렴하고 $\lim_{x \to a} h(x) = L$이다. 이 정리를 함수의 극한의 조임 정리라고 부른다.

참고 위 성질은 $x \to a+$, $x \to a-$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$일 때도 모두 성립한다.

보기 13. 함수 f가 모든 실수 x에 대하여

$$-x^2 + 2x - 3 \leq f(x) \leq x^2 - 2x - 1$$

을 만족시킬 때, 극한값 $\lim_{x \to 1} f(x)$를 구해 보자.

$$\lim_{x \to 1}(-x^2 + 2x - 3) = -2 \quad \text{그리고} \quad \lim_{x \to 1}(x^2 - 2x - 1) = -2$$

이므로 함수의 극한의 조임 정리에 의하여 $\lim_{x \to 1} f(x) = -2$이다.

보기 14. 0을 제외한 모든 실수의 집합을 $\mathbb{R}^*$로 나타내자. 그리고 함수 $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$를

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

이라고 정의하자. 만약 $g(x) = |x|$라고 하면 0이 아닌 모든 실수 x에 대하여

$$-g(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

이다. 그런데

$$\lim_{x \to 0}(-g(x)) = 0 \quad \text{그리고} \quad \lim_{x \to 0} g(x) = 0$$

이므로, 함수의 극한의 조임 정리에 의하여 $\lim_{x \to 0}\left(x \sin \frac{1}{x}\right) = 0$이다.

보기 15. 다음 극한을 구해 보자. (여기서 $[\cdot]$는 최대정수함수를 나타낸다.)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{[x] + x}{x}$$

x가 양수일 때 다음 부등식이 성립한다.

$$2 - \frac{1}{x} = \frac{(x-1) + x}{x} \leq \frac{[x] + x}{x} \leq \frac{x + x}{x} = 2$$

그런데 $\lim_{x \to \infty}\left(2 - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} 2 = 2$이므로 조임 정리에 의하여 $\lim_{x \to \infty} \frac{[x] + x}{x} = 2$이다.

연습문제

개념에 익숙해지기 위한 문제

1. 다음 극한을 구하시오.

(1) $\lim_{x\to 1}(1-6x)$

(2) $\lim_{x\to 2}\frac{x}{x-2}$

(3) $\lim_{x\to 5}\frac{x^2+1}{5-x}$

(4) $\lim_{x\to 2}(2x^2-x)$

(5) $\lim_{x\to 9}\sqrt{x}$

(6) $\lim_{x\to \infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)$

(7) $\lim_{x\to 6}\left(\sqrt{6x}+3x-\frac{1}{x}\right)(x^2-4)$

(8) $\lim_{x\to 7}(x+\sqrt{x-6})(x^2-2x+1)$

(9) $\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{5x-4}-1}{3x^2+2}$

(10) $\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x^2-5x-36}}{8-3x}$

(11) $\lim_{x\to 1}(2x^2-15x-50)^{10}$

(12) $\lim_{x\to 1}\frac{2}{|x-1|}$

(13) $\lim_{x\to -\infty}(2x+1)$

(14) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x}$

(15) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$

(16) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}$

(17) $\lim_{x\to 5}\frac{2x-10}{x^2-25}$

(18) $\lim_{x\to -1}\frac{1}{x+1}\left(\frac{x^2}{x-1}+\frac{1}{2}\right)$

(19) $\lim_{x\to 25+}\frac{\sqrt{x}-5}{x-25}$

(20) $\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}$

(21) $\lim_{x\to -\infty}\frac{x+1}{|x|-2}$

(22) $\lim_{x\to \infty}\frac{-3x^2+2x-1}{x^2-5}$

(23) $\lim_{x\to \infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2-2}}$

(24) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{|x-3|}$

(25) $\lim_{x\to 9}\frac{1}{(x-9)^2}$

(26) $\lim_{x\to 8-}\frac{x^2+64}{x-8}$

2. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$f(x)=\begin{cases} x-2 & \text{if } x\ge 1 \\ -x+3 & \text{if } x<1. \end{cases}$$

이때 다음 극한을 구하시오.

(1) $\lim_{x\to 1+}f(x)$

(2) $\lim_{x\to 1-}f(x)$

3. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{if } x\le 1 \\ k & \text{if } x>1. \end{cases}$$

이때 $\lim_{x\to 1}f(x)$가 수렴하도록 하는 k의 값을 구하시오.

4. 함수 f가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+4 & \text{if } x \geq 2 \\ -2x+k & \text{if } x < 2. \end{cases}$$

이때 극한 $\lim_{x\to 2} f(x)$가 존재하도록 하는 상수 k의 값을 구하시오.

5. 함수 f가 열린구간 $(0, \infty)$에서 정의되어 있고, 임의의 양수 x에 대하여

$$2-\frac{3}{x}< f(x) < 2+\frac{7}{x}$$

을 만족시킨다. 이때 $\lim_{x\to\infty} f(x)$를 구하시오.

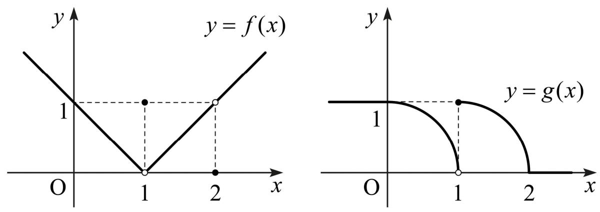
6. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$f(x)=\frac{1}{x+a}+b$$

이때 $\lim_{x\to\infty} f(x)=2$이고 $\lim_{x\to 1} f(x)$가 수렴하지 않도록 하는 상수 a와 b의 값을 구하시오.

개념을 다지기 위한 문제

7. 함수 f와 g의 그래프가 다음과 같다.



이때 다음 극한을 구하시오.

(1) $\lim_{x\to 0-} f(x)$ (2) $\lim_{x\to 1-} f(x)$

(3) $\lim_{x\to 1+} f(x)$ (4) $\lim_{x\to 2-} f(x)$

(5) $\lim_{x\to 1-} g(x)$ (6) $\lim_{x\to 1+} g(x)$

(7) $\lim_{x\to 1} g(f(x))$ (8) $\lim_{x\to 2-} g(f(x))$

(9) $\lim_{x\to 2+} g(f(x))$ (10) $\lim_{x\to 1-} f(g(x))$

(11) $\lim_{x\to 1+} f(g(x))$ (12) $\lim_{x\to 1-} g(g(x))$

(13) $\lim_{x\to 1+} g(g(x))$ (14) $\lim_{x\to 0-} g(f(x))$

(15) $\lim_{x\to 0+} g(f(x))$ (16) $\lim_{x\to 0-} f(g(x))$

8. 함수 f가 $\lim_{x\to 9} f(x)=2$를 만족시킬 때 다음 극한을 구하시오.

$$\lim_{x\to 9}\frac{(x-9)f(x)}{\sqrt{x}-3}.$$

9. 다음 등식이 성립하도록 하는 상수 a와 b의 값을 구하시오.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+a}-2}{x-1} = b$$

10. 다음 등식이 성립하도록 하는 상수 a와 b의 값을 구하시오.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-ax+b}{x-2} = 1$$

11. 다음 등식이 성립하도록 하는 상수 a와 b의 값을 구하시오.

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+a}-b}{x-2} = \frac{1}{6}$$

12. 다음 등식이 성립하도록 하는 상수 a와 b의 값을 구하시오.

$$\lim_{x \to 1} \frac{ax^2-3x+b}{x^2+2x-3} = \frac{7}{4}$$

실력을 향상시키기 위한 문제

13. 함수 f와 g가 다음을 만족시킨다.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 1 \quad \text{그리고} \quad \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x} = 2.$$

이때 극한 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)+x}{g(x)-x}$를 구하시오.

14. 함수 f와 g가 다음 두 등식을 만족시킨다.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \quad \text{그리고} \quad \lim_{x \to \infty} \{4f(x)-2g(x)\} = 1.$$

이때 다음 극한을 구하시오.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)+3g(x)}{9f(x)-5g(x)}$$

15. 함수 f와 g가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$f(x) = \frac{x^2-a^2}{x-a} \quad \text{그리고} \quad g(x) = \frac{a}{bx+1} f(x).$$

이때

$$\lim_{x \to a} f(x) = 6 \quad \text{그리고} \quad \lim_{x \to \infty} g(x) = 3$$

이 성립하도록 하는 상수 a와 b의 값을 구하시오.

16. 함수 f가 다항함수이고 다음 두 등식을 만족시킨다.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{2x^2+3x-1} = 1 \quad \text{그리고} \quad \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 2.$$

이때 $f(x)$를 구하시오.

17. 함수 f가 다항함수이고 다음 두 등식을 만족시킨다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+4x+3}=2 \quad \text{그리고} \quad \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{f(x)}=-1.$$

이때 $f(x)$를 구하시오.

18. 다음 두 등식을 만족시키는 상수 a와 b의 값을 구하시오.

$$\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x^2-a^2}=6 \quad \text{그리고} \quad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}\right)=5.$$

19. a와 b가 양수라고 하자. $[\,\cdot\,]$가 최대정수함수일 때 다음 극한을 구하시오.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right]$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\left[\frac{x}{a}\right]\frac{b}{x}$

더 깊이 공부하고 싶은 사람을 위한 문제

20. 'big O notation'과 'little o notation'을 조사해 보자.

수학을 사랑하는 사람을 위한 문제

1. I가 길이가 양수인 열린구간이고 $c\in I$라고 하자. 또한 정의역이 I이고 공역이 $\mathbb{R}$인 함수 중에서 c에서 극한이 수렴하는 함수의 모임을 S라고 하자. 실수 k와 함수 f, g에 대하여 함수 kf와 $f+g$를 다음과 같이 정의한다.

$$\text{모든 } x\in I\text{에 대하여 } (kf)(x)=k(f(x)),$$
$$\text{모든 } x\in I\text{에 대하여 } (f+g)(x)=f(x)+g(x).$$

다음 물음에 답하시오.

(1) 이 연산이 주어진 공간 S가 $\mathbb{R}$ 위에서 벡터공간임을 보이시오.

(2) $\phi(f)=\lim_{x\to c}f(x)$라고 정의된 함수 ϕ가 S로부터 $\mathbb{R}$로의 선형변환임을 보이시오.

$$\text{If} \quad \lim_{x\to 8}\frac{1}{x-8}=\infty,$$
$$\text{then} \quad \lim_{x\to 5}\frac{1}{x-5}=\rotatebox{90}{5}.$$

세 번째 이야기

극한의 엄밀한 정의

앞 두 단원에서 '다가간다'라는 직관적 개념을 바탕으로 극한을 정의하였다. 이와 같은 직관적 정의는 움직이는 점을 상상하여 동적인 개념으로 받아들이기는 좋지만 다양한 수열과 함수의 수렴 발산 여부를 엄밀하게 판단하기에는 부족하다.

1861년 바이어슈트라스[16]는 기존에 사용하던 극한의 직관적 개념의 단점을 보완하기 위하여 엡실론을 사용한 정의를 도입하였으며, 이와 같은 정의는 지금까지 사용되고 있다.

이 단원에서는 극한의 엄밀한 정의를 도입하고, 이를 바탕으로 극한의 성질을 증명하는 방법을 살펴본다.

1 수열의 극한

$\{a_n\}$이 실수열이고 L이 실수라고 하자. n의 값이 커짐에 따라 항 a_n의 값이 L에 '한없이' 가까워진다는 것은 a_n과 L의 거리

$$|a_n - L|$$

의 값이 0에 가까워진다는 뜻이다. 이 값이 0에 가까워진다는 것은, ϵ이 임의의 양수일 때

$$|a_n - L| < \epsilon$$

이 될 수 있다는 뜻이다. 이 부등식이 모든 항 a_n에 대하여 성립해야 하는 것은 아니며 n의 값이 클 때 성립하면 충분하다. 이러한 관점에서 수열의 극한을 다음과 같이 정의한다.

정의 1. $\{a_n\}$이 수열이고 L이 실수라고 하자. 만약 임의의 양수 ϵ에 대하여 자연수 N이 존재하여 $n > N$인 임의의 항번호 n에 대하여 $|a_n - L| < \epsilon$이 성립하면, "수열 $\{a_n\}$이 L에 수렴한다." 라고 말한다.

정의 1을 한정명제로 나타내면 다음과 같다.[17]

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n : (n > N \rightarrow |a_n - L| < \epsilon)$$

극한의 정의를 사용하여 수열 $\{a_n\}$이 L에 수렴한다는 증명을 '서술'하는 과정은 다음과 같다.[18]

1단계. 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 가정한다.
2단계. 적당한 N을 정의한다.
3단계. $n > N$을 가정하고 $|a_n - L| < \epsilon$임을 설명한다.

---

16) Karl Weierstrass, 1815-1897, 독일의 수학자.
17) 이 논리식에서 '$\forall n$'이 나타내는 n의 범위는 '수열 $\{a_n\}$의 항번호가 될 수 있는 모든 n'이다. 별다른 언급이 없다면 '$\forall n$'이 나타내는 n의 범위를 '모든 자연수 n'이라고 생각하여도 좋다.
18) 명제를 '증명'하는 것과 증명을 '서술'하는 것은 다르다.

보기 1. $a_n = \dfrac{1}{n}$일 때 극한 $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$의 증명은 다음과 같다.

양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자.
자연수 집합은 위로 유계가 아니므로 $N > \dfrac{1}{\epsilon}$인 자연수 N이 존재한다.
$n > N$이라고 가정하면 $|a_n - 0| = \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{N} < \epsilon$이다.
그러므로 $\{a_n\}$이 0에 수렴한다.

수열의 극한을 증명할 때 '적당한 N'을 찾는 과정이 복잡할 수도 있다. 적당한 N을 '찾는' 방법은 다음과 같다.

- 먼저 ϵ이 양수라고 가정하고 부등식 $|a_n - L| < \epsilon$을 푼다.
- 다음으로 위 부등식이 성립하도록 하는 'n의 조건'을 구한다.
- $n > N$일 때 위에서 구한 'n의 조건'이 성립하도록 하는 자연수 N을 구한다.

예제 2. $a_n = \dfrac{n+1}{2n}$일 때 $\lim_{n \to \infty} a_n = \dfrac{1}{2}$임을 증명하시오.

생각하는 과정 (N을 찾는 과정) $L = \dfrac{1}{2}$이라고 두고, ϵ이 양수라고 하자.
부등식 $|a_n - L| < \epsilon$을 변형하면 다음과 같다.

$$\left| \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \left| \frac{1}{2n} \right| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2n} < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\epsilon} < n.$$

그러므로 $N \geq \dfrac{1}{2\epsilon}$인 자연수 N을 택하면 충분하다.

증명 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자.
자연수 집합이 위로 유계가 아니므로 $N \geq \dfrac{1}{2\epsilon}$인 자연수 N이 존재한다.
$n > N$이라고 가정하면

$$\left| a_n - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2n} < \frac{1}{2N} < \epsilon$$

이다. 그러므로 $\{a_n\}$이 $\dfrac{1}{2}$에 수렴한다.

극한의 엄밀한 정의를 사용하여 수열의 극한의 성질을 증명할 수 있다. 여기서는 합의 성질과 조임 정리의 증명만 살펴보자.

보기 3. $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 수렴하는 수열이고 $\lim_{n \to \infty} a_n = L$, $\lim_{n \to \infty} b_n = M$일 때

$$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = L + M$$

임을 증명해 보자.

양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 $\dfrac{\epsilon}{2}$도 양수이다.

수열 $\{a_n\}$이 L에 수렴하므로, 자연수 N_1이 존재하여 $n > N_1$인 모든 항번호 n에 대하여

$$|a_n - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

이 성립한다. 마찬가지로 수열 $\{b_n\}$이 M에 수렴하므로, 자연수 N_2가 존재하여 $n > N_2$인 모든 항번호 n에 대하여

$$|b_n - M| < \frac{\epsilon}{2}$$

이 성립한다.

$N = \max\{N_1, N_2\}$라고 하자.[19] 그러면 $N \ge N_1$이고 $N \ge N_2$이다.

$n > N$이라고 가정하면, $n > N_1$이고 $n > N_2$이므로

$$|(a_n + b_n) - (L + M)| = |(a_n - L) + (b_n - M)| \le |a_n - L| + |b_n - M| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

이다. 그러므로 $\{a_n + b_n\}$이 $L + M$에 수렴한다.

보기 4. 수열의 극한의 조임 정리를 증명해 보자. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$이 실수열이고 L이 실수이며

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = L$$

이라고 하자. 또한 모든 항번호 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이 성립한다고 하자.

수열 $\{c_n\}$이 L에 수렴함을 증명하자.

양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 수열 $\{a_n\}$이 L에 수렴하므로 자연수 N_1이 존재하여 $n > N_1$인 모든 항번호 n에 대하여

$$|a_n - L| < \epsilon$$

이 성립한다. 이 부등식을 변형하면 다음을 부등식을 얻는다.

$$L - \epsilon < a_n < L + \epsilon.$$

마찬가지로 수열 $\{b_n\}$이 L에 수렴하므로 자연수 N_2가 존재하여 $n > N_2$인 모든 항번호 n에 대하여

$$|b_n - L| < \epsilon$$

이 성립한다. 이 부등식을 변형하면 다음 부등식을 얻는다.

$$L - \epsilon < b_n < L + \epsilon.$$

$N = \max\{N_1, N_2\}$라고 하자. 그러면 $N \ge N_1$이면서 $N \ge N_2$이다.

$n > N$이라고 가정하면, $n > N_1$이면서 $n > N_2$이므로,

$$L - \epsilon < a_n \le c_n \le b_n < L + \epsilon$$

즉 $|c_n - L| < \epsilon$이다. 그러므로 수열 $\{c_n\}$이 L에 수렴한다.

극한의 정의를 사용하여 수열이 수렴하지 않음을 증명할 수 있다.

---

19) 집합 E가 공집합이 아니고 $\mathbb{R}$의 부분집합이며 최댓값을 가질 때, $\max E$는 E의 최댓값을 나타낸다.

정의 1의 부정을 한정명제로 나타내면 다음과 같다.

$$\exists\,\epsilon > 0\ \forall\, N \in \mathbb{N}\ \exists\, n :\ (n > N\ \wedge\ |a_n - L| \geq \epsilon)$$

즉 극한의 정의를 사용하여 수열 $\{a_n\}$이 L에 수렴하지 않음을 서술하는 과정은 다음과 같다.

1단계. 적당한 양수 ϵ을 정의한다.

2단계. 자연수 N이 임의로 주어졌다고 가정한다.

3단계. [$n > N$이지만 $|a_n - L| \geq \epsilon$]인 항번호 n이 존재함을 설명한다.

보기 5. $b_n = (-1)^n$일 때 수열 $\{b_n\}$이 -1에 수렴하지 않음을 증명해 보자.

$\epsilon = 1$이라고 하자. 그리고 자연수 N이 임의로 주어졌다고 하자.

N보다 큰 짝수 n을 택하자. 그러면 $n > N$이지만

$$|b_n - (-1)| = |(-1)^n - (-1)| = |1 - (-1)| = 2 > 1 = \epsilon$$

이다. 그러므로 $\{b_n\}$이 -1에 수렴하지 않는다.[20)]

수열이 양의 무한대로 발산하는 경우와 음의 무한대로 발산하는 경우도 엄밀하게 정의할 수 있다. $\{a_n\}$이 실수열이라고 하자. $\{a_n\}$이 양의 무한대로 발산한다는 것은 큰 수 B가 있더라도

$$a_n > B$$

일 수 있다는 뜻이다. 이 부등식이 모든 항 a_n에 대하여 성립해야 하는 것은 아니며 n의 값이 클 때 성립하면 충분하다. 음의 무한대로 발산하는 수열에 대해서도 같은 방법으로 생각할 수 있다.

이와 같은 관점에서 양의 무한대로 발산하는 수열의 극한과 음의 무한대로 발산하는 수열의 극한을 다음과 같이 정의한다.

정의 2. $\{a_n\}$이 실수열이라고 하자. 이때 다음과 같이 정의한다.

(i) 만약 임의의 실수 B에 대하여 자연수 N이 존재하여 $n > N$인 임의의 항번호 n에 대하여 $a_n > B$가 성립하면, "수열 $\{a_n\}$이 양의 무한대로 발산한다."라고 말한다.

(ii) 만약 임의의 실수 B에 대하여 자연수 N이 존재하여 $n > N$인 임의의 항번호 n에 대하여 $a_n < B$가 성립하면, "수열 $\{a_n\}$이 음의 무한대로 발산한다."라고 말한다.

보기 6. $a_n = n^2$일 때 수열 $\{a_n\}$이 양의 무한대로 발산함을 증명해 보자.

실수 B가 임의로 주어졌다고 하자.

자연수 집합은 위로 유계가 아니므로 $N > \sqrt{|B|}$인 자연수 N이 존재한다.

$n > N$이라고 가정하자. 그러면

$$a_n = n^2 > N^2 > (\sqrt{|B|})^2 = |B| \geq B$$

이다. 따라서 $\{a_n\}$은 양의 무한대로 발산한다.

20) 이 보기에서는 "$\{b_n\}$이 -1에 수렴하지 않는다."라는 사실을 증명하였다. 만약 "$\{b_n\}$이 어느 수에도 수렴하지 않는다."를 증명하려면 어떻게 해야 할까?

보기 7. $b_n = -2^n$일 때 수열 $\{b_n\}$이 음의 무한대로 발산함을 증명해 보자.

먼저 임의의 자연수 n에 대하여 $2^n > n$임을 상기하자. 이 부등식을 사용하여 증명하겠다.

실수 B가 임의로 주어졌다고 하자.

자연수 집합은 위로 유계가 아니므로 $N > |B|$인 자연수 N이 존재한다.

$n > N$이라고 가정하자. 그러면

$$b_n = -2^n < -2^N < -N < -|B| \le B$$

이다. 따라서 $\{b_n\}$은 음의 무한대로 발산한다.

2 함수의 극한

I가 길이가 양수인 구간이고 $f : I \to \mathbb{R}$가 함수이며 $a \in I$라고 하자. 또한 L이 실수라고 하자. x의 값이 a가 아니면서 a에 가까워짐에 따라 $f(x)$의 값이 L에 '한없이' 가까워진다는 것은 함숫값 $f(x)$와 L 사이의 거리

$$|f(x) - L|$$

의 값이 0에 가까워진다는 뜻이다. 이 값이 0에 가까워진다는 것은, ϵ이 임의의 양수일 때

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

이 될 수 있다는 뜻이다. 이 부등식이 모든 x에 대하여 성립해야 하는 것은 아니며 x가 a에 가까울 때 성립하면 충분하다. 이러한 관점에서 함수의 극한을 다음과 같이 정의한다.

정의 3. I가 구간이고 $a \in I$이며 f가 I의 a를 제외한 모든 점에서 정의된 함수라고 하자. 또한 L이 실수라고 하자. 만약 임의의 양수 ϵ에 대하여 양수 δ가 존재하여 $0 < |x-a| < \delta$인 임의의 $x \in I$에 대하여 $|f(x) - L| < \epsilon$이 성립하면, "$x \to a$일 때 $f(x)$가 L에 **수렴**한다."라고 말한다.

정의 3을 한정명제로 나타내면 다음과 같다.

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in I : (0 < |x-a| < \delta \ \to \ |f(x) - L| < \epsilon)$$

극한의 정의를 사용하여 $x \to a$일 때 $f(x)$가 L에 수렴한다는 증명을 '서술'하는 과정은 다음과 같다.

1단계. 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 가정한다.
2단계. 적당한 양수 δ를 정의한다.
3단계. $0 < |x-a| < \delta$를 가정하고 $|f(x) - L| < \epsilon$임을 설명한다.

보기 8. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 $f(x) = 3x - 4$라고 정의되어 있다. 이때

$$\lim_{x \to 5} f(x) = 11$$

을 증명해 보자.

양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자.

$\delta = \frac{1}{3}\epsilon$이라고 하자. 그러면 δ는 양수이다.

$0 < |x-5| < \delta$라고 가정하자. 그러면

$$|f(x)-11| = |(3x-4)-11| = |3x-15| = 3|x-5| < 3\delta < \epsilon$$

이다. 따라서 $x \to 5$일 때 $f(x)$가 11에 수렴한다.

보기 9. I가 구간이고 $a \in I$이며 f가 I의 a를 제외한 모든 점에서 정의된 함수라고 하자. 또한 L이 실수이고 k가 0이 아닌 상수라고 하자.

만약 $\lim_{x \to a} f(x) = L$이면, $\lim_{x \to a}(kf(x)) = kL$임을 증명해 보자.

양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 $\frac{\epsilon}{|k|}$도 양수이다.

$x \to a$일 때 $f(x)$가 L에 수렴하므로, 양수 δ가 존재하여 $0 < |x-a| < \delta$인 모든 $x \in I$에 대하여

$$|f(x)-L| < \frac{\epsilon}{|k|}$$

이 성립한다. 이때

$$|kf(x)-kL| = |k|\,|f(x)-L| < |k| \cdot \frac{\epsilon}{|k|} = \epsilon$$

이다. 따라서 $x \to a$일 때 $kf(x)$가 kL에 수렴한다.

보기 10. 함수 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 $g(x) = x^2 - 4$라고 정의되어 있다. 이때

$$\lim_{x \to 3} g(x) = 5$$

를 증명해 보자.

생각하는 과정 (δ를 찾는 과정) ϵ이 양수라고 하자. 부등식 $|g(x)-5| < \epsilon$을 변형하면 다음과 같다.

$$|g(x)-5| < \epsilon \iff |(x^2-4)-5| < \epsilon \iff |x^2-9| < \epsilon \iff |x+3|\,|x-3| < \epsilon$$

x가 3에 가까워지면 $|x-3|$의 값은 0에 가까워진다. 반면 $|x+3|$은 0에 가까워지지 않는다.

그러나 x가 3에 '충분히' 가까울 때 $|x+3|$의 값이 '적당한 양수'를 넘지 않도록 할 수 있다. 그렇다면 x를 3에 얼마나 가깝게 만들어야 하고, $|x+3|$의 값은 얼마를 넘지 않게 할 것인가?

x와 3의 거리가 1 이하라고 가정해 보자. 즉 $|x-3| < 1$이라고 가정해 보자. 그러면 x의 값의 범위는 $2 < x < 4$이므로 $5 < x+3 < 7$이다. 이 부등식으로부터 $|x+3| < 7$을 얻는다.

$|x+3| < 7$이 성립한다는 가정 하에 $|x+3|\,|x-3| < \epsilon$이 성립하도록 하는 x의 범위를 찾자.

$$|x+3|\,|x-3| < 7|x-3| < \epsilon$$

이므로 $|x-3| < \frac{\epsilon}{7}$이면 충분하다. 그러므로 $\delta \le \frac{\epsilon}{7}$이어야 한다.

$\delta \le \frac{\epsilon}{7}$이라는 범위를 찾는 동안 $|x+3| < 7$이라는 가정을 하였다. 이 가정은 $|x-3| < 1$이라는 부등식으로부터 얻은 것이다. 그러므로 이 가정이 성립하도록 하려면 $\delta \le 1$이어야 한다.

따라서 $\delta = \min\left\{\frac{\epsilon}{7}, 1\right\}$로 두면, δ는 우리가 바라는 역할을 하는 양수이다.

증명 서술하기 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자.

$\delta = \min\left\{\dfrac{\epsilon}{7}, 1\right\}$이라고 하면 δ는 양수이다.[21)]

$0 < |x-3| < \delta$라고 가정하자. 그러면 $|x-3| < 1$이므로 $|x+3| < 7$이다.

또한 $|x-3| < \dfrac{\epsilon}{7}$이므로

$$\begin{aligned}|g(x)-5| &= |(x^2-4)-5| = |x^2-9| \\ &= |x+3|\,|x-3| \\ &< 7|x-3| < 7\cdot\frac{\epsilon}{7} = \epsilon\end{aligned}$$

이다. 따라서 $x \to 3$일 때 $g(x)$가 7에 수렴한다.

극한의 정의를 사용하여, 함수가 수렴하지 않음을 증명할 수 있다.

정의 3의 부정을 한정명제로 나타내면 다음과 같다.

$$\exists\, \epsilon > 0\ \forall\, \delta > 0\ \exists\, x \in I : (0 < |x-a| < \delta\ \ \wedge\ \ |f(x)-L| \geq \epsilon)$$

즉 극한의 정의를 사용하여 $x \to a$일 때 $f(x)$가 L에 수렴하지 않음을 서술하는 과정은 다음과 같다.

1단계. 적당한 양수 ϵ을 정의한다.
2단계. 양수 δ가 임의로 주어졌다고 가정한다.
3단계. [$0 < |x-a| < \delta$이지만 $|f(x)-L| \geq \epsilon$]인 I의 원소 x가 존재함을 설명한다.

보기 11. $I = [0, 4]$이고, 함수 $f : I \to \mathbb{R}$가 다음과 같이 정의되어 있다고 하자.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{if } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

$x \to 2$일 때 $f(x)$가 1에 수렴하지 않음을 증명해 보자.

$\epsilon = \dfrac{1}{2}$이라고 하자.[22)] 그리고 양수 δ가 임의로 주어졌다고 하자.

무리수의 조밀성[23)]에 의하여, $2 < r < 2+\delta$와 $2 < r < 4$를 모두 만족시키는 무리수 r가 존재한다.

$x = r$라고 하면 $x \in I$이고, $0 < |x-2| < \delta$이면서

$$|f(x)-1| = |0-1| = 1 \geq \frac{1}{2} = \epsilon$$

이다. 그러므로 $x \to 2$일 때 $f(x)$가 1에 수렴하지 않는다.

$x \to a$일 때 $f(x)$가 양의 무한대로 발산하거나 음의 무한대로 발산하는 극한을 다음과 같이 정의한다.

---

21) 더 작은 값을 δ로 두어도 된다. 예컨대 $\delta = \min\left\{\dfrac{\epsilon}{10}, \dfrac{1}{2}\right\}$로 두어도 바라는 결론인 $|g(x)-5| < \epsilon$을 얻을 수 있다.

22) 이 증명에서 ϵ은 1 이하인 어느 양수를 택하여도 바라는 결론을 얻을 수 있다.

23) 서로 다른 두 실수 사이에 반드시 무리수가 존재한다는 정리이다.

정의 4. I가 구간이고 $a \in I$이며 f가 I의 a를 제외한 점에서 정의된 함수라고 하자. 이때 다음과 같이 정의한다.

(i) 만약 임의의 실수 B에 대하여 양수 δ가 존재하여 $0 < |x-a| < \delta$인 임의의 $x \in I$에 대하여 $f(x) > B$가 성립하면, "$x \to a$일 때 $f(x)$가 **양의 무한대로 발산한다.**"라고 말한다.

(ii) 만약 임의의 실수 B에 대하여 양수 δ가 존재하여 $0 < |x-a| < \delta$인 임의의 $x \in I$에 대하여 $f(x) < B$가 성립하면, "$x \to a$일 때 $f(x)$가 **음의 무한대로 발산한다.**"라고 말한다.

보기 12. 0이 아닌 실수의 집합을 $\mathbb{R}^*$라고 하고, 함수 $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$가

$$g(x) = \frac{1}{x^2}$$

과 같이 정의되어 있다고 하자. $x \to 0$일 때 $g(x)$가 양의 무한대로 발산함을 증명해 보자.

실수 B가 임의로 주어졌다고 하자.

만약 $B = 0$이라면, 양수 δ를 임의로 하나 택하자. 예컨대 $\delta = 1$로 두어도 된다.

만약 $B \neq 0$이라면 $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{|B|}}$이라고 하자.

이제 $0 < |x - 0| < \delta$라고 가정하자. 그러면 $x \neq 0$이고 $|x| < \delta$이므로

$$g(x) = \frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{\delta^2} = |B| \geq B$$

이다. 따라서 $\lim_{x \to 0} g(x) = \infty$이다.

수열 $\{a_n\}$의 극한은 $n \to \infty$일 때의 극한만 정의한다. 하지만 함수 f의 극한은 $x \to a$일 때뿐만 아니라 좌극한과 우극한, 그리고 $x \to \infty$일 때와 $x \to -\infty$일 때의 극한도 정의한다.

정의 5. I가 구간이고 $a \in I$이며 f가 I의 a를 제외한 점에서 정의된 함수라고 하자. 또한 L이 실수라고 하자. 이때 다음과 같이 정의한다.24)

(i) a가 I의 내부의 점이거나 I의 왼쪽 끝점이라고 하자. 만약 임의의 양수 ϵ에 대하여 양수 δ가 존재하여 $0 < x - a < \delta$인 임의의 $x \in I$에 대하여 $|f(x) - L| < \epsilon$이 성립하면, "$x \to a+$일 때 $f(x)$가 L에 **수렴한다.**"라고 말한다.

(ii) a가 I의 내부의 점이거나 I의 오른쪽 끝점이라고 하자. 만약 임의의 양수 ϵ에 대하여 양수 δ가 존재하여 $0 < a - x < \delta$인 임의의 $x \in I$에 대하여 $|f(x) - L| < \epsilon$이 성립하면, "$x \to a-$일 때 $f(x)$가 L에 **수렴한다.**"라고 말한다.

(iii) I가 위로 유계가 아니라고 하자. 만약 임의의 양수 ϵ에 대하여 실수 X가 존재하여 $x > X$인 임의의 $x \in I$에 대하여 $|f(x) - L| < \epsilon$이 성립하면, "$x \to \infty$일 때 $f(x)$가 L에 **수렴한다.**"라고 말한다.

(iv) I가 아래로 유계가 아니라고 하자. 만약 임의의 양수 ϵ에 대하여 실수 X가 존재하여 $x < X$인 임의의 $x \in I$에 대하여 $|f(x) - L| < \epsilon$이 성립하면, "$x \to -\infty$일 때 $f(x)$가 L에 **수렴한다.**"라고 말한다.

보기 **13.** $h(x)=3^x$일 때 $\lim_{x\to-\infty} h(x)=0$을 증명해 보자.

양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자.

$X=\log_3\epsilon$이라고 하자.[25] 그러면 X는 실수이다.

$x<X$라고 가정하자. 그러면 $x<\log_3\epsilon$이므로 $|h(x)-0|=3^x<3^{\log_3\epsilon}=\epsilon$이다.

따라서 $x\to-\infty$일 때 $h(x)\to 0$이다.

3 단조수렴 정리

수열의 극한을 증명할 때 자주 사용되는 정리를 하나를 소개한다.

먼저 유계수열을 정의하자. $\{a_n\}$이 실수열이라고 하자.

- 만약 실수 M이 존재하여 임의의 항번호 n에 대하여 $a_n\le M$을 만족시키면, "$\{a_n\}$이 **위로 유계이다**(bounded above)."라고 말한다. 이때 M을 $\{a_n\}$의 **상계**라고 부른다.
- 만약 실수 m이 존재하여 임의의 항번호 n에 대하여 $m\le a_n$을 만족시키면, "$\{a_n\}$이 **아래로 유계이다**(bounded below)."라고 말한다. 이때 m을 $\{a_n\}$의 **하계**라고 부른다.
- 만약 $\{a_n\}$이 위로 유계이면서 아래로 유계이면, "$\{a_n\}$이 **유계**이다."라고 말하고 $\{a_n\}$을 **유계수열**(bounded sequence)이라고 부른다.

정리 **2.** $\{a_n\}$이 실수열이라고 하자. 만약 $\{a_n\}$이 단조수열이면서 유계수열이면 $\{a_n\}$은 수렴한다. 이 정리를 **단조수렴 정리**(monotone convergence theorem)라고 부른다.

증명 $\{a_n\}$이 단조수열이므로, $\{a_n\}$은 단조증가수열이거나 또는 단조감소수열이다.

$\{a_n\}$이 단조증가수열인 경우를 증명하자.

집합 $A=\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$을 생각하자. A는 공집합이 아니며 위로 유계이다. 실수계의 최소상계 성질에 의하여 A의 최소상계가 존재한다. A의 최소상계를 L이라고 하자.

수열 $\{a_n\}$이 L에 수렴함을 보이자. 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $L-\epsilon$은 A의 최소상계인 L보다 작은 수이므로 $L-\epsilon<x\le L$인 원소 x가 A에 존재한다. 그런데 A는 $\{a_n\}$의 항으로 이루어진 집합이므로 $a_N=x$인 항번호 N이 존재한다. 즉 $L-\epsilon<a_N\le L$이다.

이제 $n>N$이라고 가정하자. $\{a_n\}$이 단조증가수열이므로 $a_N\le a_n$이다. 그런데 L이 A의 상계이므로 $a_n\le L$이다. 즉 $n>N$일 때 $L-\epsilon<a_N\le a_n\le L$이므로, $n>N$일 때 $|a_n-L|<\epsilon$이다. 그러므로 $\{a_n\}$은 L에 수렴한다.

$\{a_n\}$이 단조감소수열인 경우 $\{-a_n\}$은 단조증가수열이고 유계이다. 따라서 앞에서 증명한 결과에 의하여 $\{-a_n\}$이 수렴한다. 그러므로 $\{a_n\}$도 수렴한다. ■

24) 여기서는 수렴하는 함수의 극한만 정의하였다. 양의 무한대로 발산하는 함수와 음의 무한대로 발산하는 함수의 극한의 정의도 찾아보자.

25) $X=\log_3\epsilon$이라는 식을 어떻게 찾았을까?

단조수렴 정리를 사용하여 수열이 수렴함을 증명하는 예를 살펴보자.

보기 14. $\{a_n\}$이 실수열이고 $a_1 = 1$이며 임의의 n에 대하여 $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$이라고 하자. 이때 $\{a_n\}$이 수렴함을 증명해 보자.

먼저 $a_1 = 1 \le 2$이다. 다음으로 자연수 k에 대하여 $a_k \le 2$가 성립한다고 가정하면

$$a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} \le \sqrt{2+2} = 2$$

이다. 그러므로 수학적 귀납법에 의하여 임의의 자연수 n에 대하여 $a_n \le 2$이다. 즉 $\{a_n\}$은 위로 유계인 수열이다.

한편 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이고

$$(a_{n+1})^2 = 2 + a_n \ge a_n + a_n = 2a_n = 2 \times a_n \ge a_n \times a_n = (a_n)^2$$

이므로 $\{a_n\}$은 단조증가수열이다. 즉 임의의 n에 대하여 $a_n \ge a_1$이다. 그러므로 $\{a_n\}$은 아래로도 유계이다. 즉 $\{a_n\}$은 유계이다.[26] 따라서 단조수렴 정리에 의하여 $\{a_n\}$은 수렴한다.

시작한 김에 $\{a_n\}$의 극한값까지 구해 보자. $\{a_n\}$의 극한값을 L이라고 하자. 그러면

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{2 + \lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{2+L}$$

이다. 방정식 $L = \sqrt{2+L}$을 풀면 $L = 2$를 얻는다.

따라서 $\{a_n\}$은 수렴하고, 그 극한값은 2이다.

보기 15. $0 < r < 1$일 때 수열 $\{r^n\}$이 0에 수렴함을 증명해 보자.

우선 임의의 자연수 n에 대하여 $r^n > r^n \times r = r^{n+1}$이므로 $\{r^n\}$은 감소수열이다.

다음으로 임의의 자연수 n에 대하여 $r^n > 0$이므로 $\{r^n\}$은 아래로 유계이다.

따라서 단조수렴 정리에 의하여 $\{r^n\}$은 수렴한다. $\{r^n\}$의 극한값을 L이라고 하자. 그러면

$$L = \lim_{n\to\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} r^{n+1} = \lim_{n\to\infty} r^n \times \lim_{n\to\infty} r = Lr$$

이다. 여기서 $0 < r < 1$이므로, $L = Lr$이 성립하려면 $L = 0$일 수밖에 없다.

그러므로 $\{r^n\}$은 0에 수렴한다.

귀납적으로 정의된 수열의 극한을 조사할 때 수렴한다는 사실을 증명하지 않으면 잘못된 결론에 다다를 수 있다. 다음 보기를 살펴보자.

보기 16. $\{b_n\}$이 실수열이고 $b_1 = b_2 = 1$이며 임의의 n에 대하여 $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$이라고 하자. $\{b_n\}$이 수렴하리라는 잘못된 믿음을 가지고서 $\{b_n\}$의 극한값을 L이라고 해보자. 그러면

$$L = \lim_{n\to\infty} b_{n+2} = \lim_{n\to\infty} (b_{n+1} + b_n) = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} + \lim_{n\to\infty} b_n = L + L = 2L$$

이다. 방정식 $L = 2L$을 풀면 $L = 0$을 얻는다. 그런데 $\{b_n\}$의 모든 항이 1 이상이므로, $\{b_n\}$의 극한값이 0이 될 수 없다.

---

26) $\{a_n\}$이 단조증가수열이라면 $\{a_n\}$이 위로 유계라는 사실만 보여도 단조수렴 정리를 적용할 수 있다.

연습문제

개념에 익숙해지기 위한 문제

1. x가 양수인 상수일 때, 일반항이 다음과 같은 수열 $\{a_n\}$이 수렴함을 단조수렴 정리를 사용하여 보이시오.

$$a_n = \frac{x^n}{n!}$$

2. r가 양수일 때 수열 $\left\{r^{\frac{1}{n}}\right\}$이 수렴함을 단조수렴 정리를 사용하여 보이시오.

3. 수열 $\{a_n\}$이 다음과 같이 정의되어 있다.

$$a_1 = 3,\ \text{임의의 자연수 } n\text{에 대하여 } a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6).$$

이때 $\{a_n\}$의 극한이 수렴함을 보이시오.

4. 일반항이 다음과 같은 수열 $\{a_n\}$이 발산함을 보이시오.

$$a_n = \frac{n!}{2^n}$$

5. 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$에 대하여, 수열 $\{a_n\}$이 L에 수렴하고 수열 $\{|b_n - a_n|\}$이 0에 수렴한다고 하자. 이때 수열 $\{b_n\}$이 L에 수렴함을 보이시오.

6. 수열의 극한의 엄밀한 정의를 사용하여 다음을 증명하시오.

(1) $a_n = \dfrac{4}{n}$일 때 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$이다.

(2) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$일 때 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$이다.

(3) $a_n = \dfrac{n+2}{3n}$일 때 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \dfrac{1}{3}$이다.

7. 함수의 극한의 엄밀한 정의를 사용하여 다음을 증명하시오.

(1) $f(x) = 4x - 3$일 때 $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$이다.

(2) $f(x) = -3x + 5$일 때 $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = -7$이다.

(3) $f(x) = 2x + 8$일 때 $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 6$이다.

8. 수열 $\{a_n\}$이 L에 수렴하고 $b_n = |a_n|$이면 수열 $\{b_n\}$이 $|L|$에 수렴함을 보이시오.

9. $\{a_n\}$이 실수열이고 L이 실수라고 하자. 만약 두 수열 $\{a_{2n}\}$과 $\{a_{2n+1}\}$이 모두 L에 수렴하면 $\{a_n\}$도 L에 수렴함을 보이시오.

10. 수렴하는 수열은 유계임을 보이시오. 즉 $\{a_n\}$이 수렴하는 수열이면, [임의의 항번호 n에 대하여 $|a_n| \le M$]을 만족시키는 양수 M이 존재함을 보이시오.

개념을 다지기 위한 문제

11. I가 닫힌구간이고 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 I에 속한다고 하자. 만약 $\{a_n\}$이 L에 수렴하면 $L \in I$임을 보이시오.

12. I가 닫힌구간이고 함수 $f : D \to I$의 함숫값이 모두 I에 속한다고 하자. 만약 $x \to a$일 때 $f(x) \to L$이면 $L \in I$임을 보이시오.

13. 수열 $\{a_n\}$이 다음과 같이 정의되어 있다.

$$a_1 = 2, \ \text{임의의 자연수 } n\text{에 대하여 } a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right).$$

이때 $\{a_n\}$이 수렴함을 보이시오.

14. $\{x_n\}$과 $\{y_n\}$이 실수열이고 $0 < x_1 < y_1$이며, 임의의 자연수 n에 대하여

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

을 만족시킨다. 이때 두 수열 $\{x_n\}$과 $\{y_n\}$이 모두 수렴하고 그 극한이 일치함을 보이시오.

15. 단조수렴 정리를 사용하여 일반항이 다음과 같은 수열 $\{a_n\}$이 수렴함을 보이시오.

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n)}$$

16. 수열의 극한의 엄밀한 정의를 사용하여 다음을 증명하시오.

(1) $a_n = \dfrac{3n^2 + n}{n^2 + 1}$일 때 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = 3$이다.

(2) $b_n = n^2$일 때 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} b_n = \infty$이다.

(3) $b_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$일 때 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} b_n = \infty$이다.

(4) $c_n = -n^2 + 4$일 때 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} c_n = -\infty$이다.

(5) $c_n = -n^2 + 3n + 7$일 때 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} c_n = -\infty$이다.

(6) $c_n = n - \sqrt{n}$일 때 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} c_n = \infty$이다.

17. 함수의 극한의 엄밀한 정의를 사용하여 다음을 증명하시오.

(1) $f(x) = x^2 + x + 1$일 때 $\displaystyle\lim_{x \to 1} f(x) = 3$이다.

(2) $f(x) = -2x^2 + 3x - 4$일 때 $\displaystyle\lim_{x \to 2} f(x) = -6$이다.

(3) $g(x) = \dfrac{1}{x}$일 때 $\displaystyle\lim_{x \to 3} g(x) = \dfrac{1}{3}$이다.

(4) $g(x) = \dfrac{1}{2x - 5}$일 때 $\displaystyle\lim_{x \to 2} g(x) = -1$이다.

(5) $g(x) = \dfrac{x + 9}{x^2 + 3}$일 때 $\displaystyle\lim_{x \to -1} g(x) = 2$이다.

(6) $g(x) = \dfrac{7 - x^2}{x + 3}$일 때 $\displaystyle\lim_{x \to 1} g(x) = \dfrac{3}{2}$이다.

실력을 향상시키기 위한 문제

18. 함수 f의 정의역이 I이고 a가 실수일 때, 다음 극한의 엄밀한 정의를 기술하시오.
[직접 정의해 보고, 자료를 검색하여 찾은 결과와 자신의 정의를 비교해 보자.]

(1) $\lim_{x \to a+} f(x) = \infty$ (2) $\lim_{x \to a+} f(x) = -\infty$

(3) $\lim_{x \to a-} f(x) = \infty$ (4) $\lim_{x \to a-} f(x) = -\infty$

(5) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ (6) $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

(7) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ (8) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

19. 함수의 극한의 엄밀한 정의를 사용하여 다음을 증명하시오.

(1) $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$일 때 $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$이다.

(2) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$일 때 $\lim_{x \to 1} f(x) = \infty$이다.

(3) $f(x) = \dfrac{1}{x}$일 때 $\lim_{x \to 0+} f(x) = \infty$이다.

(4) $f(x) = \dfrac{1}{2x-6}$일 때 $\lim_{x \to 3-} f(x) = -\infty$이다.

(5) $f(x) = \dfrac{1}{(x+3)(x-5)}$일 때 $\lim_{x \to 5+} f(x) = \infty$이다.

(6) $f(x) = \dfrac{x}{(x+3)(x-5)}$일 때 $\lim_{x \to 5-} f(x) = -\infty$이다.

(7) $f(x) = \dfrac{x}{(x+3)(x-5)}$일 때 $\lim_{x \to -3+} f(x) = \infty$이다.

(8) $f(x) = \dfrac{x+3}{(x-4)\sqrt{x}}$일 때 $\lim_{x \to 0+} f(x) = -\infty$이다.

20. 함수의 극한의 엄밀한 정의를 사용하여 다음을 증명하시오.

(1) $g(x) = \dfrac{1}{x}$일 때 $\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$이다.

(2) $g(x) = \dfrac{x+4}{x-3}$일 때 $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 1$이다.

(3) $g(x) = 2^x$일 때 $\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$이다.

(4) $g(x) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$일 때 $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$이다.

(5) $g(x) = -x^2 + 4$일 때 $\lim_{x \to \infty} g(x) = -\infty$이다.

(6) $g(x) = -3x^2 + 5$일 때 $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$이다.

(7) $g(x) = \dfrac{x^2-3}{2x-4}$일 때 $\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$이다.

(8) $g(x) = \dfrac{x^2+4}{|x|+1}$일 때 $\lim_{x \to -\infty} g(x) = \infty$이다.

21. a가 실수이고 두 함수 f, g가 $x \to a$일 때 수렴하며

$$\lim_{x \to a} f(x) = L, \quad \lim_{x \to a} g(x) = M$$

이라고 하자. 극한의 엄밀한 정의를 사용하여 다음을 증명하시오.

(1) $\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = L + M$

(2) $\lim_{x \to a}(kf(x)) = kL$ (단, k는 상수)

22. 두 함수 f, g가 $x \to \infty$일 때 수렴하며

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L, \quad \lim_{x \to \infty} g(x) = M$$

이라고 하자. 극한의 엄밀한 정의를 사용하여 다음을 증명하시오.

(1) $\lim_{x \to \infty}(f(x) + g(x)) = L + M$

(2) $\lim_{x \to \infty}(kf(x)) = kL$ (단, k는 상수)

23. $\{a_n\}$이 유계인 수열이고 $\{b_n\}$이 양의 무한대로 발산하는 수열일 때, 극한의 엄밀한 정의를 사용하여 다음을 증명하시오.

(1) $\lim_{n \to \infty}(a_n + b_n) = \infty$

(2) $\lim_{n \to \infty}(a_n - b_n) = -\infty$

24. $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 수열이고 모든 n에 대하여 $a_n \le b_n$이라고 하자. 극한의 엄밀한 정의를 사용하여 다음을 증명하시오.

(1) 만약 $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$이면 $\lim_{n \to \infty} b_n = \infty$이다.

(2) 만약 $\lim_{n \to \infty} b_n = -\infty$이면 $\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$이다.

25. I가 열린구간이고 c가 I의 점이며, 함수 f, g, h가 I에서 정의되어 있다고 하자. 극한의 엄밀한 정의를 사용하여 다음을 증명하시오.

(1) 만약 c를 제외한 I의 임의의 점 x에서 $f(x) \le h(x)$이고 L과 M이 실수이며

$$\lim_{x \to c} f(x) = L, \quad \lim_{x \to c} g(x) = M$$

이면 $L \le M$이다.

(2) 만약 c를 제외한 I의 임의의 점 x에서 $f(x) \le g(x) \le h(x)$이고 L이 실수이며

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$$

이면, $x \to c$일 때 $g(x)$가 수렴하고 $\lim_{x \to c} g(x) = L$이다.

26. I가 위로 유계가 아닌 구간이고 함수 f가 I에서 정의되어 있으며 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 I에 속한다고 하자. 만약 L이 실수이고

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L, \quad \lim_{n \to \infty} a_n = \infty$$

이면

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = L$$

임을 보이시오.

27. $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 수렴하는 수열이고

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L, \quad \lim_{n \to \infty} b_n = M$$

이라고 하자. 극한의 엄밀한 정의를 사용하여 다음을 증명하시오.

(1) $\lim_{n \to \infty} (a_n b_n) = LM$

(2) $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{M}$ (단, 모든 n에 대하여 $b_n \neq 0$이고 $M \neq 0$)

28. 두 함수 f, g가 $x \to a$일 때 수렴하고

$$\lim_{x \to a} f(x) = L, \quad \lim_{x \to a} g(x) = M$$

이라고 하자. 극한의 엄밀한 정의를 사용하여 다음을 증명하시오.

(1) $\lim_{x \to a} (f(x) g(x)) = LM$

(2) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ (단, $M \neq 0$)

29. 수열 $\{e_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

(1) x가 실수이고 n이 자연수이며 $x > -1$이고 $n > 2$일 때 다음이 성립함을 보이시오.

$$(1 + x)^n > 1 + nx$$

(2) n이 $n > 2$인 자연수일 때 다음이 성립함을 보이시오.

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n}$$

(3) n이 $n > 2$인 자연수일 때 다음이 성립함을 보이시오.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

(4) n이 자연수일 때 다음이 성립함을 보이시오.

$$\left(\frac{1}{n} + 1\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$$

(5) 단조수렴 정리를 사용하여 수열 $\{e_n\}$이 수렴함을 보이시오.

30. I가 길이가 양수인 구간이고 함수 f가 I에서 정의되어 있다고 하자. 또한 구간 I에서 함수 f가 단조라고 하자.
   (1) c가 구간 I에 있는 점이고 I의 왼쪽 끝점은 아니라고 하자. 그러면 c에서 f의 좌극한이 존재함을 보이시오.
   (2) c가 구간 I에 있는 점이고 I의 오른쪽 끝점은 아니라고 하자. 그러면 c에서 f의 우극한이 존재함을 보이시오.

   이와 같은 성질을 **함수의 점 극한의 단조수렴 정리**라고 부른다.

31. I가 구간이고 함수 f가 I에서 정의되어 있다고 하자.
   (1) 구간 I가 위로 유계가 아니고, 구간 I에서 함수 f가 단조이고 유계라고 하자. $x \to \infty$일 때 $f(x)$가 수렴함을 보이시오.
   (2) 구간 I가 아래로 유계가 아니고, 구간 I에서 함수 f가 단조이고 유계라고 하자. $x \to -\infty$일 때 $f(x)$가 수렴함을 보이시오.

   이와 같은 성질을 **함수의 무한대 극한의 단조수렴 정리**라고 부른다.

32. '극한의 유일성'의 개념을 조사해 보자. 또한 수열의 극한의 유일성과 함수의 극한의 유일성을 각각 증명해 보자.

수학을 사랑하는 사람을 위한 문제

1. G가 $\mathbb{R}$의 부분집합이고 $a \in G$라고 하자. 만약 $a \in I \subseteq G$인 열린구간 I가 존재하면, a를 G의 **내점**(interior point)이라고 부른다. 집합 G의 내점들의 모임을 G의 **내부**(interior)라고 부르고 G^o라고 나타낸다. 만약 $G = G^o$이면 G를 **열린집합**(open set)이라고 부른다. 다음을 증명하시오.
   (1) G_1과 G_2가 열린집합이면 $G_1 \cap G_2$도 열린집합이다.
   (2) $\{G_i \mid i \in I\}$의 모든 원소가 열린집합이면 $\bigcup_{i \in I} G_i$도 열린집합이다.

2. F가 $\mathbb{R}$의 부분집합이고 b가 실수라고 하자. 만약 $b \in I$인 임의의 열린구간 I에 대하여 $I \cap E \neq \varnothing$이면 b를 F의 **집적점**(cluster point)이라고 부른다. F의 집적점들의 모임을 F의 **도집합**(derived set)이라고 부르고 F'이라고 나타낸다. 만약 $F' \subseteq F$이면 F를 **닫힌집합**(closed set)이라고 부른다. 즉 닫힌집합이란 자신의 집적점을 모두 원소로 갖는 집합이다. 다음을 증명하시오.
   (1) 집합 G가 열린집합이기 위한 필요충분조건은 $\mathbb{R} \setminus G$가 닫힌집합인 것이다.
   (2) F_1과 F_2가 닫힌집합이면 $F_1 \cup F_2$도 닫힌집합이다.
   (3) $\{F_j \mid j \in J\}$의 모든 원소가 닫힌집합이면 $\bigcap_{j \in J} F_j$도 닫힌집합이다.

3. E가 $\mathbb{R}$의 부분집합이라고 하자. E를 포함하는 닫힌집합 중 가장 작은 것을 E의 **폐포**(closure)라고 부르고 $\overline{E}$와 같이 나타낸다. 즉 E를 포함하는 모든 닫힌집합의 모임을 $\{F_i \mid i \in I\}$라고 할 때

$$\overline{E} = \bigcap_{i \in I} F_i$$

   라고 정의한다. 이때 $\overline{E} = E \cup E'$임을 보이시오.

4. F가 닫힌집합이고 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 F에 속한다고 하자. 만약 수열 $\{a_n\}$이 L에 수렴하면 $L \in F$임을 증명하시오.

영어로 표현하기 (수열의 극한과 함수의 극한)

☐ A sequence is an enumerated collection of objects in which repetitions are allowed and order matters. A sequence is formally defined as a function whose domain is an interval of integers.

☐ An infinite sequence is a function whose domain is $\mathbb{N}$. A sequence f whose terms are $x_n = f(n)$ will be denoted by $\{x_n\}$. In this book, unless otherwise noted, a sequence always refers to an infinite sequence.

☐ A sequence has a limit L if the elements of the sequence become closer and closer to the value L, and they become and remain arbitrarily close to L, meaning that given a real number d greater than zero, all but a finite number of the elements of the sequence have a distance from L less than d.

☐ We call L the limit of the sequence $\{a_n\}$, if for each real number $\epsilon > 0$, there exists a natural number N such that, for every natural number $n > N$, we have $|a_n - L| < \epsilon$.

☐ If $\{a_n\}$ is not a convergent sequence, then we say that $\{a_n\}$ diverges, or alternatively that the limit of $\{a_n\}$ does not exist.

☐ If $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$ are convergent sequences, then $\{a_n + b_n\}$ is also a convergent sequence, and can be computed as follows:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

☐ If a_n becomes arbitrarily large as $n \to \infty$, we write

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

In this case we say that the sequence diverges to infinity.

☐ If a sequence $\{a_n\}$ does not converge, and if $\{a_n\}$ does not tend to positive infinity nor to negative infinity, then say that $\{a_n\}$ oscillates.

☐ The limit of a geometric sequence $\{r^n\}$ converges if and only if $-1 < r \leq 1$.

☐ Suppose that a function f is defined near a, not necessarily at a. If $f(x)$ can be made as close to L as desired, by making x close enough, but not equal, to a, then we say that f converges to L as x approaches a.

☐ We call L the limit of the function f as x approaches a, if for every real $\epsilon > 0$, there exists a real $\delta > 0$ such that for all real x in the domain of f, $0 < |x-a| < \delta$ implies that $|f(x) - L| < \epsilon$.

☐ The limit of the function f as x approaches a from right is L if, for every $\epsilon > 0$, there exists a $\delta > 0$ such that $|f(x) - L| < \epsilon$ whenever $0 < x - a < \delta$.

☐ If f is a polynomial function and a is a real number, then the limit of $f(x)$ as x approaches a coincides $f(a)$, the value of f at a.

☐ A real number M is called an upper bound of a sequence $\{a_n\}$ if $a_n \leq M$ for all $n \in \mathbb{N}$. If there exists an upper bound of a sequence $\{a_n\}$, then $\{a_n\}$ is said to be bounded above.

☐ A sequence $\{a_n\}$ is said to be bounded below if and only if the set $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ is bounded below. $\{a_n\}$ is said to be bounded if and only if it is bounded both above and below.

☐ Show that every convergent sequence is bounded.

☐ If a sequence $\{a_n\}$ is monotone and bounded, then $\{a_n\}$ converges to a finite limit.

☐ By a subsequence of a sequence $\{a_n\}$, we shall mean a sequence of the form $\{a_{n_k}\}$, where each $n_k \in \mathbb{N}$ and $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$.

☐ If a sequence $\{a_n\}$ converges to L and if $\{a_{n_k}\}$ is a subsequence of $\{a_n\}$, then $\{a_{n_k}\}$ also converges to L.

☐ Decide which of the following limits exist and which do not; prove that your answer is correct.

☐ Find the value of b for which the limit of $f(x)$ as $x \to a$ converges.

☐ Use the monotone convergence theorem to prove that the sequence $\{a_n\}$, defined recursively as $a_1 = 1$ and $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ for all $n \in \mathbb{N}$, converges.

☐ Use the precise definition of the limit to show that $\dfrac{n+2}{3n} \to \dfrac{1}{3}$ as $n \to \infty$.

☐ Suppose that I is a closed interval and every term of a sequence $\{a_n\}$ belongs to I. Show that if $\{a_n\}$ converges to L, then L belongs to I.

네 번째 이야기

연속의 개념

일정한 힘을 받아 운동하는 물체의 위치나 속도는 연속함수로 나타낼 수 있다. 또한 평면에 놓인 매끄러운 곡선이나 공간에 놓인 매끄러운 곡면은 연속함수의 그래프로 나타낼 수 있다. 이처럼 연속함수의 개념은 수학을 기반으로 하는 다양한 분야에서 사용된다.

이 단원에서는 함수의 극한을 바탕으로 함수의 연속성을 정의하고, 연속함수의 성질을 살펴보자.

1 함수의 연속

함수 f가 c에서 연속이라는 것은 직관적으로는 $y=f(x)$의 그래프가 $x=c$에서 끊어지지 않았다는 것을 뜻한다. 이와 같은 상황을 극한을 사용하여 더 정확하게 정의할 수 있다.

함수 f가 세 조건

(i) 함수 f가 c에서 정의되어 있다,

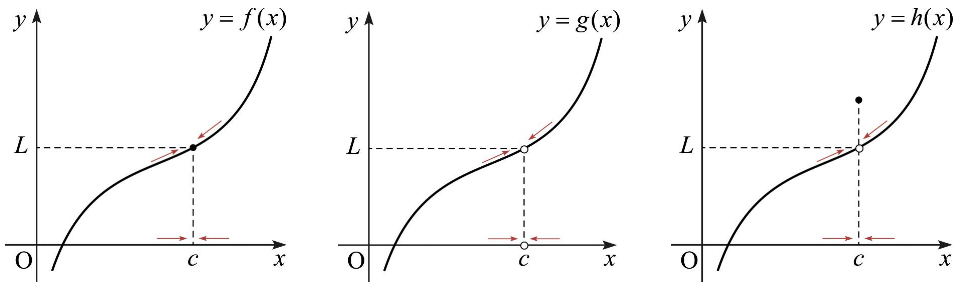
(ii) 극한값 $\lim_{x \to c} f(x)$가 존재한다,

(iii) $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

를 모두 만족시킬 때, "함수 f가 c에서 **연속이다**(continuous at c)."라고 말한다.

한편 함수 f가 c에서 연속이 아닐 때, "함수 f가 c에서 **불연속**이다."라고 말한다. 즉 함수 f가 위의 세 조건 중 어느 하나라도 만족시키지 않으면 f는 c에서 불연속이다.[27]

예컨대 그래프가 다음과 같은 함수 f, g, h 중에서 점 c에서 연속인 것은 함수 f 뿐이다.



함수 f가 열린구간 I에 속하는 모든 점에서 연속일 때, "f는 **구간** I**에서 연속**이다."라고 말한다.

또 닫힌구간 $[a, b]$에서 정의된 함수 f가 세 조건

(i) f가 열린구간 (a, b)에서 연속이다,

(ii) $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$,

(iii) $\lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$

를 모두 만족시킬 때, "f는 **구간** $[a, b]$**에서 연속이다**(continuous on an interval)."라고 말한다.[28]

---

27) 함수 f가 c에서 정의되지 않았을 때 c에서 f의 연속성을 따지지 않는다고 정의하기도 한다.
28) (ii)가 성립할 때 "함수 f가 a에서 **우연속**이다."라고 말하며, (iii)이 성립할 때 "함수 f가 b에서 **좌연속**이다."라고 말한다.

일반적으로 어떤 구간에서 연속인 함수를 그 구간에서 **연속함수**(continuous function)라고 부른다.

보기 1. 함수 f가 $f(x)=x^2$이라고 정의된 이차함수라고 하자. 이 함수의 정의역은 $\mathbb{R}$이다. c가 임의의 실수일 때

$$\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c} x^2=c^2=f(c)$$

이므로 f는 c에서 연속이다.

여기서 c는 f의 정의역의 임의의 점이다. 그러므로 f는 연속함수이다.

보기 2. 함수 f가

$$f(x)=\frac{1}{x-1}$$

일 때, f는 $x=1$을 제외한 모든 점에서 정의되어 있다. 또한 $c\neq 1$일 때

$$\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{c-1}=f(c)$$

이므로 f는 $c=1$을 제외한 모든 점 c에서 연속이다.

보기 3. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 다음과 같이 정의되어 있다고 하자.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x+a}{x-1} & \text{if } x\neq 1,\\ b+1 & \text{if } x=1.\end{cases}$$

이 함수가 모든 실수 x에서 연속이 되도록 상수 a와 b의 값을 정해 보자.

$x>1$이거나 $x<1$일 때 이 함수는 분모가 0이 아닌 분수함수이므로 연속이다.

이 함수가 $x=1$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$이다. 즉

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+a}{x-1}=b+1 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 이때 극한값

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+a}{x-1}$$

가 존재하고 분모의 극한이 $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$이므로 분자의 극한도

$$\lim_{x\to 1}(x^2-2x+a)=0$$

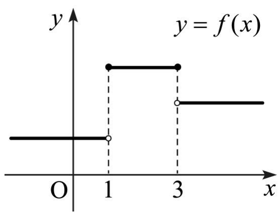
이다. 즉 $1-2+a=0$이므로 $a=1$이다.

$a=1$을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-1)=0$$

이다. 즉 $0=b+1$이므로 $b=-1$이다.

보기 **4.** 함수 f가 다음과 같이 정의되어 있다고 하자.



$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{if } x<1\\ 3 & \text{if } 1\le x\le 3\\ 2 & \text{if } x>3\end{cases}$$

이때 함수 f는 1과 3에서 불연속이다.

그러나 f는 닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 연속이다.

2 연속함수의 성질

두 함수 f와 g가 $x=c$에서 연속이면

$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c),\quad \lim_{x\to c} g(x)=g(c)$$

이므로, 함수의 극한의 성질에 의하여 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to c} kf(x)=k\lim_{x\to c} f(x)=kf(c)\quad (\text{단, } k\text{는 상수}),$$

$$\lim_{x\to c}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to c} f(x)+\lim_{x\to c} g(x)=f(c)+g(c),$$

$$\lim_{x\to c}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to c} f(x)-\lim_{x\to c} g(x)=f(c)-g(c),$$

$$\lim_{x\to c}\{f(x)g(x)\}=\left(\lim_{x\to c} f(x)\right)\times\left(\lim_{x\to c} g(x)\right)=f(c)g(c),$$

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}=\frac{f(c)}{g(c)}\quad (\text{단, } g(c)\neq 0)$$

따라서 함수 $kf,\ f+g,\ f-g,\ fg,\ f/g$도 모두 $x=c$에서 연속이다.

정리 **1.** 두 함수 f와 g가 $x=c$에서 연속이면 다음 함수도 모두 $x=c$에서 연속이다.

(1) kf (단, k는 상수) (2) $f+g$ (3) $f-g$

(4) fg (5) f/g (단, $g(c)\neq 0$)

보기 **4.** 상수함수와 함수 $y=x$는 모든 실수 x에서 연속이므로, **정리** 1의 (1), (2), (4)에 의하여

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0\quad (a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n\text{은 상수})$$

이라고 정의된 다항함수 f는 모든 실수 x에서 연속이다.

또 두 다항함수 $f,\ g$에 대하여

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

라고 정의된 유리함수 h는 **정리** 1의 (5)에 의하여 $g(x)\neq 0$인 모든 실수 x에서 연속이다.

닫힌구간 $[-2,\ 1]$에서 $f(x)=x^2$이라고 정의된 연속인 함수 f는 $x=-2$일 때 최댓값 4를 갖고 $x=0$일 때 최솟값 0을 가진다. 그러나 열린구간 $(-2,\ 1)$에서 함수 f는 최댓값을 갖지 않고 $x=0$일 때 최솟값만 가진다.

한편 닫힌구간 $[-2,\ 1]$에서

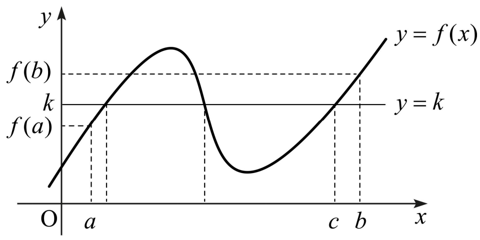
$$g(x)=\begin{cases} 0 & \text{if } x=-2, \\ x & \text{if } -2<x<1, \\ -1 & \text{if } x=1 \end{cases}$$

이라고 정의된 함수 g는 $[-2,\ 1]$에서 최댓값을 갖지 않고 최솟값도 갖지 않는다.

일반적으로 닫힌구간에서 연속인 함수는 다음과 같은 성질을 가진다.

정리 2. 함수 f가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이면, f는 이 구간 $[a,\ b]$에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가진다. 이 정리를 **연속함수의 최대·최소 정리**(extreme value theorem)라고 부른다.

함수 f가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$일 때, 아래 그림과 같이 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 직선 $y=k$와 함수 $y=f(x)$의 그래프는 적어도 한 점에서 만난다.



따라서 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$인 점 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

정리 3. 함수 f가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$일 때, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여,

$$f(c)=k$$

인 점 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다. 이 정리를 **연속함수의 사잇값 정리**(intermediate value theorem)라고 부른다.

사잇값 정리를 사용하여 방정식의 근의 존재성을 증명하는 예를 살펴보자.

보기 5. 방정식 $x^5-x^2-1=0$이 열린구간 $(0,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 증명해 보자.

$f(x)=x^5-x^2-1$이라고 하면 f는 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 연속이고

$$f(0)=-1<0,\ f(2)=32-4-1=27>0$$

이므로, 사잇값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(0,\ 2)$에 존재한다.

따라서 방정식 $x^5-x^2-1=0$은 열린구간 $(0,\ 2)$에 적어도 하나의 실근을 가진다.

중학교 과정에서 제곱하여 2가 되는 양수를 $\sqrt{2}$라고 나타낸다고 배웠다. 그렇다면 $\sqrt{2}$는 실수 범위에서 정말 존재하는 수일까?

보기 6. 사잇값 정리를 사용하여 $\sqrt{2}$가 실수로서 존재함을 증명해 보자.

$f(x)=x^2$이라고 정의된 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$를 생각하자. 그러면 f는 다항함수이므로 연속함수이다.

$$f(0)=0<2<4=f(2)$$

이므로 $f(c)=2$인 실수 c가 0과 2 사이에 존재한다. 또한 $x>0$일 때 $f(x)$가 순증가함수이므로 $f(c)=2$를 만족시키는 양수 c가 단 하나 존재한다.

이와 같은 수 c를 2의 **양의 제곱근**이라고 부르고 $\sqrt{2}$와 같이 나타낸다.

연속함수의 최대·최소 정리와 사잇값 정리를 결합하면 다음 보기와 같이 연속함수의 멋진 성질을 증명할 수 있다.

보기 7. 함수 f가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이라고 하자. 이때 $[a, b]$에서 f의 치역이 닫힌구간임을 증명해 보자.

먼저 연속함수의 최대·최소 정리에 의하여, $[a, b]$에서 f의 최댓값과 최솟값이 존재한다. $[a, b]$에서 f의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라고 하자.

만약 $M=m$이라면 $[a, b]$의 모든 원소 x에 대하여 $m\le f(x)\le M$이므로, f는 $[a, b]$에서 상수함수이고, $[a, b]$에서 f의 치역은 $\{M\}$으로서 하나의 원소를 가진 집합이다. 하나의 원소를 가진 집합은 $[M, M]$과 같이 닫힌구간으로 나타낼 수 있다.

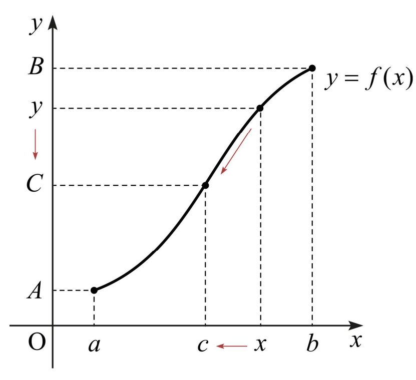
이제 $m<M$인 경우를 생각해 보자. 만약 $m<y<M$이라면 사잇값 정리에 의하여 $f(c)=y$인 점 c가 a와 b 사이에 존재한다. 즉 y는 $[a, b]$에서 f의 치역의 원소이다. 한편 $[a, b]$에서 f의 함숫값은 M보다 커질 수 없고 m보다 작아질 수 없다. 따라서 $[a, b]$에서 f의 치역은 $m\le y\le M$인 모든 y를 원소로 가지며, 이 외의 원소는 갖지 않는다. 따라서 $[a, b]$에서 f의 치역은 $[m, M]$이다.

3 역함수와 합성함수

함수 f가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고, 이 구간에서 순증가한다고 하자. 그리고 $f(a)=A$, $f(b)=B$라고 하자. 그러면 f는 $[a, b]$로부터 $[A, B]$로의 일대일대응이므로, 역함수

$$f^{-1}:[A, B]\to[a, b]$$

가 존재하며, f^{-1} 또한 순증가함수이다. $c\in(a, b)$라고 하고 $f(c)=C$라고 하자.



$x\in[a, b]$, $y\in[A, B]$, $y=f(x)$라고 하자. 오른쪽 그림과 같이 y의 값이 $C\neq y$이면서 C에 다가가면 x의 값은 $x\neq c$이면서 c에 다가간다. 그러므로 f^{-1}는 C에서 연속이다.

함수 f가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, 이 구간에서 순감소하는 경우에도 마찬가지로 f의 역함수 f^{-1}가 존재하고, 이 역함수가 연속함수이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

> **정리 4.** 함수 f가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, 구간 $[a,\ b]$에서 f가 순증가하거나 또는 구간 $[a,\ b]$에서 f가 순감소한다고 하자. 구간 $[a,\ b]$에서 f의 치역을 $[A,\ B]$라고 하자. 그러면 함수 $f : [a,\ b] \to [A,\ B]$의 역함수 $f^{-1} : [A,\ B] \to [a,\ b]$가 존재하고, f^{-1}는 구간 $[A,\ B]$에서 연속이다. 이 정리를 **연속함수의 역함수 정리**라고 부른다.

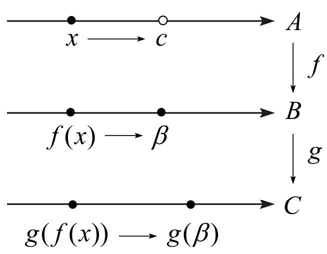
참고 정리 4는 닫힌구간 $[a,\ b]$를 열린구간이나 반열린구간으로 바꾸어도 성립한다.

> **보기 8.** $x \geq 0$인 x에 대하여 $g(x) = x^2$이라고 하자. 그러면 $g : [0,\ \infty) \to [0,\ \infty)$는 연속함수이며 순증가함수이다. 그러므로 $f(x) = \sqrt{x}$라고 정의되는 g의 역함수 $f : [0,\ \infty) \to [0,\ \infty)$ 또한 연속함수이다.

두 함수 $f : A \to B$와 $g : B \to C$에 대하여, c가 A의 점이고 $x \to c$일 때 $f(x) \to \beta$라고 하자. 그리고 함수 g가 β에서 연속이라고 하자. 그러면 x가 c가 아니면서 c에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값이 β에 한없이 가까워진다. 그런데 g가 β에서 연속이므로, $f(x)$의 값이 β에 한없이 가까워질 때 $g(f(x))$의 값은 $g(\beta)$에 한없이 가까워진다.

이 사실을 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\lim_{x \to c} g(f(x)) = g(\beta) = g\left(\lim_{x \to c} f(x)\right).$$



특히 f가 c에서 연속이라면 $\beta = f(c)$가 되므로,

$$\lim_{x \to c} g(f(x)) = g(\beta) = g(f(c))$$

이다. 이것은 합성함수 $g \circ f$가 c에서 연속임을 의미한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

> **정리 5.** 두 함수 $f : A \to B$와 $g : B \to C$에 대하여, c가 A의 점이고 $x \to c$일 때 $f(x) \to \beta$라고 하자. 그리고 함수 g가 β에서 연속이라고 하자. 이때 다음이 성립한다.
>
> (1) $\lim_{x \to c} g(f(x)) = g(\beta) = g\left(\lim_{x \to c} f(x)\right)$
>
> (2) 만약 함수 f가 c에서 연속이면 합성함수 $g \circ f$도 c에서 연속이다.

정리 5의 (1)을 한 마디로 표현하면 다음과 같다.

> 연속함수 밖에서 극한을 취하여 계산한 결과와 연속함수 안에서 극한을 취하여 계산한 결과가 같다.

보기 9. $h(x)=\sqrt{x-3}$이라고 하자. 그러면 h는

$$f(x)=x-3,\quad g(x)=\sqrt{x}$$

라고 정의된 두 함수 $f:[3,\ \infty)\to\mathbb{R}$와 $g:[0,\ \infty)\to\mathbb{R}$의 합성함수 $h=g\circ f$이다. 이때 f와 g가 각각 정의역의 모든 점에서 연속인 함수이므로 h도 정의역의 모든 점에서 연속인 함수이다.

보기 10. 정리 5에서 g가 β에서 연속이 아니라면

$$\lim_{x\to c} g(f(x)) \neq g\left(\lim_{x\to c} f(x)\right)$$

일 수 있다. 예를 들어 함수 f와 g가 다음과 같이 정의되어 있다고 하자.

$$f(x)=4x-1,\quad g(x)=\begin{cases}1 & \text{if } x=7,\\ x & \text{if } x\neq 7.\end{cases}$$

그리고 $c=2$라고 하자. 그러면

$$g(f(x))=\begin{cases}1 & \text{if } x=2,\\ 4x-1 & \text{if } x\neq 2.\end{cases}$$

이므로

$$\lim_{x\to c} g(f(x))=\lim_{x\to 2} g(f(x))=\lim_{x\to 2}(4x-1)=7$$

이고

$$g\left(\lim_{x\to c} f(x)\right)=g\left(\lim_{x\to 2}(4x-1)\right)=g(7)=1$$

이다.

정리 5의 (2)에 의하여 다음을 얻는다.

정리 6. 두 함수 $f:A\to B$와 $g:B\to C$가 모두 연속함수이면 합성함수 $g\circ f:A\to C$도 연속함수이다.

삼각함수, 지수함수, 로그함수는 각 함수의 정의역에서 연속인 함수이다[8단원에서 증명한다]. 그러므로 정리 6에 의하여 이들의 합성함수 또한 연속함수이다. 예컨대 다음과 같은 함수는 모두 각각의 정의역에서 연속인 함수이다.

$$y=\log\left(x^2+1\right),\quad y=e^{\sin x},\quad y=\sin\left(x^3-x+1\right),\quad y=\cos(\tan x),\quad \cdots$$

연습문제

개념에 익숙해지기 위한 문제

1. 함수 f가 $[1, \infty)$에서 연속이고, $x \geq 1$인 모든 x에 대하여 다음을 만족시킨다.
$$(x-2)f(x) = \sqrt{x-1} - 1$$
이때 $f(2)$를 구하시오.

2. 함수 f가 실수 전체 구간에서 연속이고, 임의의 실수 x에 대하여 다음을 만족시킨다.
$$(x+1)f(x) = x^2 - 2x - 3$$
이때 $f(-1)$의 값을 구하시오.

3. 함수 f가 다음과 같이 정의되어 있다.
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^3 - 6x^2 - x + 2}{x-2} & \text{if } x \neq 2 \\ k & \text{if } x = 2. \end{cases}$$
이때 f가 실수 전체 구간에서 연속이 되도록 하는 상수 k의 값을 구하시오.

4. 함수 f가 다음과 같이 정의되어 있다.
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - a}{x-2} & \text{if } x \neq 2 \\ b & \text{if } x = 2. \end{cases}$$
이때 f가 2에서 연속이 되도록 하는 상수 a와 b의 값을 구하시오.

5. 함수 f가 다항함수이고 다음을 만족시킨다.
$$\lim_{x \to -1} \frac{(x+1)f(x)}{x^2 - 1} = 3$$
이때 $f(-1)$의 값을 구하시오.

6. 함수 f가 실수 전체 구간에서 연속이고, 임의의 실수 x에 대하여 다음을 만족시킨다.
$$(x-a)f(x) = x^2 + 2x + 1$$
이때 상수 a의 값과 함숫값 $f(a)$를 구하시오.

7. 방정식 $x^3 + 2x^2 - 3x - 10 = 0$의 근이 열린구간 $(-1, 3)$에 하나 이상 존재함을 보이시오.

8. 방정식 $x^3 - 2x^2 - 1 = 0$의 근이 열린구간 $(2, 3)$에 하나 이상 존재함을 보이시오.

9. 함수 f가 실수 전체 구간에서 연속이고 다음 등식을 모두 만족시킨다.
$$f(0) = -\frac{1}{2},\ f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2},\ f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3},\ f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{4},\ f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{4}{5},\ f(1) = \frac{5}{6}.$$
이때 방정식 $f(x) - x = 0$의 근 중에서 열린구간 $(0, 1)$에 존재하는 것의 개수를 구하시오.

개념을 다지기 위한 문제

10. 함수 f가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax-2}{x-1} & \text{if } x\neq 1\\ b & \text{if } x=1.\end{cases}$$

이때 f가 실수 전체 구간에서 연속이 되도록 하는 상수 a와 b의 값을 구하시오.

11. 함수 f가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$f(x)=\begin{cases}x+a & \text{if } x\leq 1\\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{6x^{n+1}-2x^n}{x^n+1} & \text{if } x>1.\end{cases}$$

이때 f가 실수 전체 구간에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 값을 구하시오.

12. 함수 f가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$f(x)=\begin{cases}ax+b & \text{if } |x|\geq 3\\ \dfrac{|x|-3}{9-x^2} & \text{if } |x|<3.\end{cases}$$

이때 f가 실수 전체 구간에서 연속이 되도록 하는 상수 a와 b의 값을 구하시오.

13. 함수 f가 $\mathbb{R}$에서 연속이고, 임의의 실수 x에 대하여 다음을 만족시킨다.

$$(x^2-1)f(x)=ax^3+bx^2-ax-b.$$

$f(-1)=1,\ f(1)=2$일 때 상수 a와 b의 값을 구하시오.

14. 함수 f가 $\mathbb{R}$에서 연속이고, 임의의 실수 x에 대하여 다음을 만족시킨다.

$$(x-3)f(x)=2x^2+ax-b$$

$f(4)=9$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

15. 다음과 같이 정의된 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 불연속인 점을 모두 구하시오. (단, $[\ \cdot\ ]$는 최대정수함수를 나타낸다.)

(1) $f(x)=[x]x^2$

(2) $f(x)=[x^2]$

(3) $f(x)=[x^2](x-1)$

16. 방정식 $x^2-4x+a=0$의 근이 열린구간 $(-2,\ 1)$에 존재하도록 하는 상수 a의 값의 범위를 구하시오.

17. I가 길이가 양수인 닫힌구간이고 함수 $f:I\to I$가 I에서 연속이라고 하자. 이때 $f(p)=p$를 만족시키는 점 p가 I에 존재함을 보이시오.

18. $a,\ b,\ c$가 실수인 상수이고 $a<b<c$를 만족시킨다. $A,\ B$가 방정식

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$$

의 근이고 $A<B$라고 하자. 이때 $a<A<b<B<c$임을 보이시오.

더 깊이 공부하고 싶은 사람을 위한 문제

19. 다음 용어의 뜻을 조사해 보자.
    (1) 제거 가능한 불연속 (removable discontinuity)
    (2) 도약불연속 (jump discontinuity)
    (3) 무한불연속 (infinite discontinuity)
    (4) 진동불연속 (oscillating discontinuity)

수학을 사랑하는 사람을 위한 문제

1. $[a, b]$가 길이가 양수인 닫힌구간이고 $C[a, b]$가 정의역이 $[a, b]$이고 공역이 $\mathbb{R}$인 연속함수의 모임이라고 하자. 실수 k와 함수 f, g에 대하여 함수 kf와 $f+g$를 다음과 같이 정의한다.

   모든 $x \in I$에 대하여 $(kf)(x) = k(f(x))$,

   모든 $x \in I$에 대하여 $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

   이 연산이 주어진 공간 $C[a, b]$가 $\mathbb{R}$ 위에서 벡터공간임을 보이시오.

2. 모든 항이 함수인 수열을 **함수열**(sequence of functions)이라고 부른다. I가 길이가 양수인 구간이고 $\{f_n\}$이 정의역이 I인 함수로 이루어진 함수열이라고 하자. 만약 임의의 $x \in I$에 대하여 항번호가 n인 실수열 $\{f_n(x)\}$이 수렴하면,

   $$\text{임의의 } x \in I \text{에 대하여 } f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

   라고 정의되는 함수 f를 생각할 수 있다. 이때 함수 f를 함수열 $\{f_n\}$의 **극한함수**(limiting function)라고 부른다. 구간 I와 함수열 $\{f_n\}$이 다음과 같이 주어졌을 때, I에서 $\{f_n\}$이 수렴하는지 판별하고 $\{f_n\}$의 극한함수를 구하시오.

   (1) $I = [0, 1]$, $f_n(x) = x^n$
   (2) $I = [0, 2]$, $f_n(x) = x^n$
   (3) $I = \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^3 - \dfrac{4x}{n}$
   (4) $I = (0, 1]$, $f_n(x) = nx(1-x)^n$
   (5) $I = [0, 1]$, $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx}$
   (6) $I = (0, 1]$, $f_n(x) = \dfrac{1}{nx+1}$

3. $\{f_n\}$이 정의역이 I인 함수로 이루어진 함수열이고 f가 $\{f_n\}$의 극한함수라고 하자. $\{f_n\}$의 모든 항이 연속함수일 때 f도 연속함수가 되는가?

다섯 번째 이야기

연속의 엄밀한 정의

점 c에서 함수 f의 연속성을 정의할 때 극한을 사용했다. 함수의 극한은 $\epsilon-\delta$ 논법으로 정의할 수 있으므로 함수의 연속성 또한 $\epsilon-\delta$ 논법으로 정의할 수 있다.

이 단원에서는 함수의 연속성을 엄밀하게 정의하고, 연속성과 관련된 정리의 증명을 살펴보자.

1 연속의 정의

함수 f가 c를 원소로 갖는 구간 I에서 정의되어 있다고 하자. $x \to c$일 때 $f(x)$가 $f(c)$에 수렴한다는 것은

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in I : (0 < |x-c| < \delta \to |f(x)-f(c)| < \epsilon)$$

이 성립한다는 것이다. 그런데 $x=c$일 때 $|f(x)-f(c)|=0<\epsilon$이 자명하게 성립하므로, 위 정의에서 $0<|x-c|<\delta$를 $|x-c|<\delta$로 바꾸어도 된다.

정의 1. I가 공집합이 아닌 구간이고 $f : I \to \mathbb{R}$가 함수이며 $c \in I$라고 하자. 만약 임의의 양수 ϵ에 대하여 양수 δ가 존재하여 $|x-c|<\delta$인 임의의 $x \in I$에 대하여 $|f(x)-f(c)|<\epsilon$이 성립하면, “함수 f가 c에서 **연속**이다.”라고 말한다.

참고 위 정의에서 I가 길이가 양수인 구간일 때뿐만 아니라 I가 원소가 하나인 집합일 때도 정의된다. 즉 $I=\{c\}$라면, 임의의 양수 ϵ에 대하여 $\delta=1$일 때[29]

$$|x-c|<\delta \quad \Rightarrow \quad x=c \quad \Rightarrow \quad |f(x)-f(c)|=0<\epsilon$$

이므로 함수 f가 점 c에서 연속이다. □

보기 1. 다음과 같이 정의된 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$를 살펴보자.

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{if } x \in \mathbb{Q}, \\ -x & \text{if } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

이 함수가 0에서 연속임을 증명해 보자.

양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. $\delta=\epsilon$이라고 하면 δ는 양수이다.

이제 $|x-0|<\delta$라고 가정하자. 그러면 x가 유리수일 때는

$$|f(x)-f(0)|=|x|<\delta=\epsilon$$

이고, x가 무리수일 때는

$$|f(x)-f(0)|=|-x|=|x|<\delta=\epsilon$$

이다. 두 경우 모두 $|f(x)-f(0)|<\epsilon$이라는 결과를 얻는다.

따라서 f는 0에서 연속이다.

29) 여기서 δ가 1이 아닌 다른 양수여도 된다.

연속의 정의를 사용하여 함수 f가 점 c에서 불연속임을 서술하는 과정은 다음과 같다.

1단계. 적당한 양수 ϵ을 정의한다.
2단계. 양수 δ가 임의로 주어졌다고 가정한다.
3단계. $|x-c|<\delta$이지만 $|f(x)-f(c)|\geq\epsilon$인 정의역의 원소 x가 존재함을 설명한다.

보기 2. $c\neq 0$일 때, **보기** 1의 함수 f가 점 c에서 불연속임을 증명해 보자.

$\epsilon=|c|$라고 하자. 그러면 ϵ은 양수이다.

양수 δ가 임의로 주어졌다고 하자.

점 c가 유리수인 경우, 무리수의 조밀성에 의하여 $|x-c|<\delta$와 $|x-c|<\epsilon$을 모두 만족시키는 무리수 x가 존재한다. 이때 x와 c의 부호가 같으므로

$$|f(x)-f(c)|=|-x-c|=|x+c|=|x|+|c|\geq|c|=\epsilon$$

이다.

점 c가 무리수인 경우, 유리수의 조밀성에 의하여 $|x-c|<\delta$와 $|x-c|<\epsilon$을 모두 만족시키는 유리수 x가 존재한다. 이때 x와 c의 부호가 같으므로

$$|f(x)-f(c)|=|x+c|=|x|+|c|\geq|c|=\epsilon$$

이다.

두 경우 모두 $|x-c|<\delta$이면서 $|f(x)-f(c)|\geq\epsilon$인 x가 f의 정의역에 존재한다.
그러므로 함수 f는 점 c에서 연속이 아니다.

함수 f가 길이가 양수인 구간 I에서 정의되어 있고 c가 I의 점이라고 하자. 극한을 사용하여 f의 연속성을 정의할 때 x가 c에 다가간다는 개념을 사용하였다. 그런데 x가 c에 다가간다는 개념을 수열의 극한으로 바꾸어 생각할 수 있다. 즉 함수의 연속을 정의할 때 수열의 극한을 사용할 수 있다.

정리 2. I가 길이가 양수인 구간이고 $f:I\to\mathbb{R}$가 함수이며 $c\in I$라고 하자.

(1) 함수 f가 c에서 연속이라고 하자. 그러면 모든 항이 I에 속하고 c에 수렴하는 '임의의' 수열 $\{x_n\}$에 대하여, 수열 $\{f(x_n)\}$이 $f(c)$에 수렴한다.

(2) 함수 f가 c에서 연속이 아니라고 하자. 그러면 모든 항이 I에 속하고 c에 수렴하는 수열 $\{x_n\}$이 존재하여, 수열 $\{f(x_n)\}$이 $f(c)$에 수렴하지 않는다.

이와 같이 수열을 사용하여 정의한 연속성을 **점열연속**(sequentially continuous)이라고 부른다.

증명 (1) $\{x_n\}$이 c에 수렴하고 모든 항이 I에 속하는 수열이라고 하자. 그리고 양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자. f가 c에서 연속이므로, 양수 δ가 존재하여 $|x-c|<\delta$인 임의의 $x\in I$에 대하여 $|f(x)-f(c)|<\epsilon$이 성립한다. δ가 양수이고 $\{x_n\}$이 c에 수렴하므로, 자연수 N이 존재하여 $n>N$인 임의의 항번호 n에 대하여 $|x_n-c|<\delta$가 성립한다. 이때

$$n>N \;\Rightarrow\; |x_n-c|<\delta \;\Rightarrow\; |f(x_n)-f(c)|<\epsilon$$

이다. 그러므로 수열 $\{f(x_n)\}$이 $f(c)$에 수렴한다.

(2) 함수 f가 c에서 연속이 아니라고 가정하자. 그러면 양수 ϵ이 존재하여 다음을 만족시킨다.

"임의의 양수 δ에 대하여, $x \in I$가 존재하여 $|x-c| < \delta$이면서 $|f(x)-f(c)| \geq \epsilon$이다."

$\delta_n = \dfrac{1}{n}$이라고 하자. n이 자연수일 때 δ_n이 양수이므로, $|x_n - c| < \delta_n$인 $x_n \in I$가 존재하여 $|f(x_n)-f(c)| \geq \epsilon$을 만족시킨다. 이때 임의의 자연수 n에 대하여 $c-\delta_n < x_n < c+\delta_n$이므로 $\{x_n\}$은 c에 수렴하지만, $|f(x_n)-f(c)| \geq \epsilon$이므로 $\{f(x_n)\}$은 $f(c)$에 수렴하지 않는다. ■

정리 2를 사용하면 보기 2의 문제를 더 쉽게 해결할 수 있다.

보기 3. $c \neq 0$일 때 보기 1의 함수 f가 점 c에서 불연속임을 정리 2를 사용하여 증명해 보자.

결론과는 반대로 함수 f가 점 c에서 연속이라고 가정하자.

c에 수렴하는 유리수열 $\{r_n\}$과 c에 수렴하는 무리수열 $\{s_n\}$을 생각하자.30)

f가 c에서 연속라고 가정했으므로

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} r_n = c,$$
$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(s_n) = \lim_{n\to\infty} (-s_n) = -c$$

이다. 그런데 $c \neq 0$이므로 두 등식은 서로 모순이다.
그러므로 함수 f는 점 c에서 연속이 아니다.

보기 4. 두 함수 $f : A \to B$와 $g : B \to C$에 대하여, c가 A의 점이고 $\beta = f(c)$라고 하자. 또한 f가 c에서 연속이고 g가 β에서 연속이라고 하자. 이때 합성함수 $g \circ f$가 c에서 연속임을 증명해 보자.

양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자.

g가 β에서 연속이므로, 양수 δ_1이 존재하여 B의 임의의 원소 y에 대하여

$$|y-\beta| < \delta_1 \;\Rightarrow\; |g(y)-g(\beta)| < \epsilon$$

이 성립한다. 여기서 δ_1이 양수이고 f가 c에서 연속이므로, 양수 δ가 존재하여 A의 임의의 원소 x에 대하여

$$|x-c| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x)-f(c)| < \delta_1$$

이 성립한다.

그러므로 A의 임의의 원소 x에 대하여

$$\begin{aligned} |x-c| < \delta \;&\Rightarrow\; |f(x)-f(c)| < \delta_1 \\ &\Rightarrow\; |g(f(x))-g(f(c))| < \epsilon \\ &\Rightarrow\; |(g \circ f)(x)-(g \circ f)(c)| < \epsilon \end{aligned}$$

이 성립한다. 따라서 $g \circ f$는 c에서 연속이다.

---

30) 그러한 수열 $\{r_n\}$과 $\{s_n\}$이 왜 존재할까?

2 연속함수와 관련된 정리의 증명

이 절에서는 연속의 정의를 사용하여 연속함수의 다양한 성질을 증명해 보자. 미적분학을 처음 공부한다면 정리 3의 내용만 읽고 정리의 증명과 다른 보기는 생략해도 좋다.

보기 5. 함수 f가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) < k < f(b)$라고 하자. 이때 $f(c) = k$를 만족시키는 점 c가 열린구간 (a, b)에 존재함을 보이자.

다음과 같은 집합을 생각하자.

$$E = \{x \in [a, b] \mid f(x) < k\}.$$

이 집합은 공집합이 아니다. 왜냐하면 $a \in E$이기 때문이다. 또한 E의 모든 원소 x에 대하여 $x \le b$이다. 즉 E가 공집합이 아니고 위로 유계이므로 최소상계 성질에 의하여 E의 최소상계가 존재한다. E의 최소상계를 c라고 하자. 그러면 명백히 $a \le c \le b$이다.

c가 E의 최소상계이므로 c보다 더 작은 값은 E의 상계가 될 수 없다. 그러므로 n이 자연수일 때

$$c - \frac{1}{n} < x_n \le c$$

를 만족시키는 점 x_n이 E에 존재한다. 이때 임의의 n에 대하여 $f(x_n) < k$이고, $\{x_n\}$이 c에 수렴하며 f가 c에서 연속이므로

$$f(c) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) \le k$$

이다.

한편 $c < b$이다. 왜냐하면 f가 b에서 연속이고 $k < f(b)$이므로, 양수 δ가 존재하여 $|x - b| < \delta$일 때마다 $k \le f(x)$이기 때문이다.

$c < b$이므로, n이 자연수일 때

$$c < y_n < c + \frac{1}{n}$$

을 만족시키는 점 y_n이 닫힌구간 $[c, b]$에 존재한다. 이때 $y_n \notin E$이므로 $f(y_n) \ge k$이고, $\{y_n\}$이 c에 수렴하며 f가 c에서 연속이므로

$$f(c) = \lim_{n \to \infty} f(y_n) \ge k$$

이다.

이로써 $f(c) \le k$이면서 $f(c) \ge k$이므로, $f(c) = k$이다.

다음과 같이 정의된 수열 $\{x_n\}$을 살펴보자.

$$\{x_n\}: -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots,\ (-1)^n,\ \cdots$$

이 수열은 수렴하지 않는다. 하지만 $x_{2n} = 1$이고 $x_{2n+1} = -1$이므로, 이 수열의 일부 항을 모아서 만든 수열 $\{x_{2n}\}$과 $\{x_{2n+1}\}$은 수렴한다.

이와 같이 $\{n_k\}$가 모든 항이 자연수인 순증가수열일 때, 수열 $\{x_n\}$과 $\{n_k\}$의 합성함수 $\{x_{n_k}\}$는 항번호를 나타내는 문자가 k인 수열이 된다. 이러한 수열 $\{x_{n_k}\}$를 $\{x_n\}$의 **부분수열**이라고 부른다.

다음 정리는 극한이나 연속함수의 성질을 밝힐 때 자주 사용된다.

정리 3. 수열 $\{x_n\}$이 유계이면, $\{x_n\}$의 부분수열 중에서 수렴하는 것이 존재한다. 이 정리를 수열에 대한 **볼차노-바이어슈트라스 정리**(Bolzano-Weierstrass theorem)라고 부른다.[31]

증명 수열 $\{x_n\}$이 유계이므로, 양수 B가 존재하여 임의의 n에 대하여 $x_n \in [-B, B]$를 만족시킨다. $I_0 = [-B, B]$라고 하자. I_0을 길이가 같은 두 개의 닫힌구간

$$[-B, 0] \text{ 그리고 } [0, B]$$

로 잘랐을 때, 두 구간 중 최소한 하나는 $\{x_n\}$의 항을 무한히 많이 가진다. 그러한 구간을 택하여 I_1이라고 하자. 그리고 $I_1 = [a_1, b_1]$이라고 하자. I_1을 길이가 같은 두 개의 닫힌구간

$$\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right] \text{ 그리고 } \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$$

로 잘랐을 때, 두 구간 중 최소한 하나는 $\{x_n\}$의 항을 무한히 많이 가진다. 그러한 구간을 택하여 I_2라고 하자. 이와 같은 방법으로 계속하여 닫힌구간 $I_3, I_4, I_5, \cdots$를 만들어갈 수 있다.

자연수 k에 대하여 $I_k = [a_k, b_k]$라고 나타내면, $\{a_k\}$는 단조증가수열이고 $\{b_k\}$는 단조감소수열이며 두 수열 모두 유계이다. 그러므로 두 수열 모두 수렴한다. 또한

$$|b_k - a_k| = \frac{B}{2^{k-1}}$$

이므로 $\{a_k\}$와 $\{b_k\}$는 같은 값에 수렴한다. 그 극한을 c라고 하자.

이제 $\{x_n\}$의 부분수열 $\{x_{n_k}\}$를 다음과 같은 방법으로 구성하자.

I_1에 속한 $\{x_n\}$의 항을 하나 택하여 x_{n_1}이라고 하자.

I_2에 속한 $\{x_n\}$의 항 중에서 항번호가 n_1보다 큰 것을 택하여 x_{n_2}라고 하자.

I_3에 속한 $\{x_n\}$의 항 중에서 항번호가 n_2보다 큰 것을 택하여 x_{n_3}이라고 하자.

$$\vdots$$

이와 같은 방법으로 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$이면서 $x_{n_k} \in I_k$인 항 x_{n_k}를 택할 수 있다.[32]

이때 임의의 자연수 k에 대하여 $a_k \le x_{n_k} \le b_k$이다. 그러므로 조임 정리에 의하여 $\{x_{n_k}\}$는 c에 수렴한다. ■

보기 6. 함수 f가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이라고 하자. 이때 f가 $[a, b]$에서 유계임을 증명해 보자.

결론과는 반대로 f가 $[a, b]$에서 유계가 아니라고 가정하자. 그러면 f가 $[a, b]$에서 위로 유계가 아니거나, 또는 f가 $[a, b]$에서 아래로 유계가 아니다. f가 $[a, b]$에서 위로 유계가 아닌 경우를 살펴보자.

---

31) 볼차노(Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano, 1781-1848)는 체코의 수학자 및 철학자, 논리학자이다.

32) 수학적 귀납법을 사용하면 이 과정을 더 논리적으로 서술할 수 있다.

n이 임의의 자연수라고 하자. f가 $[a, b]$에서 위로 유계가 아니므로 $f(x_n) > n$인 점 x_n이 $[a, b]$에 존재한다. 수열 $\{x_n\}$의 모든 항이 $[a, b]$에 속하므로, $\{x_n\}$은 유계이다. 그러므로 볼차노-바이어슈트라스 정리에 의하여 $\{x_n\}$의 부분수열 중 수렴하는 것이 존재한다. 그러한 부분수열을 $\{x_{n_k}\}$라고 하고, $\{x_{n_k}\}$의 극한값을 c라고 하자.

$\{n_k\}$가 순증가하는 자연수열이므로, 임의의 자연수 k에 대하여 $n_k \geq k$이다. 그런데 $f(x_n) > n$이므로 $f(x_{n_k}) > n_k \geq k$이다. 따라서

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = \infty$$

이다.

한편 c가 $\{x_{n_k}\}$의 극한값이고 $\{x_{n_k}\}$의 모든 항이 닫힌구간 $[a, b]$에 속하므로, c도 $[a, b]$에 속한다. 그런데 f가 c에서 연속이므로

$$f(c) = \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = \infty$$

이다. 이것은 c에서 f의 함숫값이 실수가 아니라는 뜻이므로 모순이다. 그러므로 f는 $[a, b]$에서 위로 유계이다.

한편 f가 $[a, b]$에서 아래로 유계가 아니라면, $g(x) = -f(x)$라고 정의된 함수 g가 $[a, b]$에서 연속이지만 위로 유계가 아닌 함수가 되어 모순이다. 그러므로 f는 $[a, b]$에서 아래로 유계이다.

보기 7. 함수 f가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면, f는 이 구간 $[a, b]$에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가짐을 증명해 보자.

결론과는 반대로 f가 $[a, b]$에서 최댓값을 갖지 않는다고 가정하자. f가 $[a, b]$에서 위로 유계이므로 f의 치역 $E = \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$는 위로 유계이며 공집합이 아닌 집합이다. 그러므로 실수계의 최소상계 성질에 의하여 E의 최소상계 M이 존재한다.

f가 $[a, b]$에서 최댓값을 갖지 않는다고 가정했으므로 M은 f의 상계일 뿐이며 최댓값이 아니다. 즉 $[a, b]$의 임의의 점 x에 대하여 $f(x) < M$이다.

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

이라고 하자. 그러면 g는 $[a, b]$에서 연속인 함수이다. 그러므로 $[a, b]$에서 g가 위로 유계이며, 이 구간에서 g의 상계 B가 존재한다. 즉 $[a, b]$의 임의의 점 x에 대하여

$$\frac{1}{M - f(x)} < B$$

이다. 위 부등식의 양변이 모두 양수이므로, $[a, b]$의 임의의 점 x에 대하여

$$f(x) < M - \frac{1}{B}$$

이 성립한다. 이것은 $M - 1/B$이 $[a, b]$에서 f의 상계임을 뜻하므로, M이 $[a, b]$에서 f의 최소상계라는 사실에 모순이다. 그러므로 f는 $[a, b]$에서 최댓값을 가진다.

만약 f가 $[a, b]$에서 최솟값을 갖지 않는다면 $g(x) = -f(x)$라고 정의된 함수 g가 $[a, b]$에서 연속이지만 최댓값을 갖지 않는 함수가 되어 모순이다. 그러므로 f는 $[a, b]$에서 최솟값을 가진다.

연습문제

개념을 다지기 위한 문제

1. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 실수 전체 구간에서 연속이고, 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)\in\mathbb{Q}$가 성립한다고 하자. 이때 f가 상수함수임을 보이시오.

2. 수열 $\{a_n\}$이 L에 수렴하면 $\{a_n\}$의 부분수열 $\{a_{n_k}\}$도 L에 수렴함을 보이시오.

3. I가 길이가 양수인 열린구간이고 함수 f가 I에서 정의되어 있다고 하자. 또한 $c\in I$이고 f가 c에서 불연속이라고 하자. 만약 c에서 f의 좌극한과 우극한이 모두 존재하면 c를 f의 **단순불연속점**(simple discontinuity)이라고 부른다.
   (1) 최대정수함수가 불연속인 점은 모두 단순불연속점임을 보이시오.
   (2) 단순불연속점이 아닌 불연속점을 갖는 함수의 예를 드시오.

4. I가 길이가 양수인 열린구간이고 함수 f가 I에서 정의되어 있다고 하자. 또한 $c\in I$이고 f가 c에서 불연속이라고 하자. 만약 c에서 f의 함숫값 $f(c)$를 다시 정의하여 f가 c에서 연속이 되도록 할 수 있으면, c를 f의 **제거 가능한 불연속점**(removable discontinuity)이라고 부른다.
   (1) 점 c가 함수 f의 제거 가능한 불연속점일 때, c에서 f의 극한이 존재함을 보이시오.
   (2) 제거 가능한 불연속점은 모두 단순불연속점임을 보이시오.

실력을 향상시키기 위한 문제

5. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 다음과 같이 정의되어 있다.
$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{if } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{if } x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$
이때 모든 점에서 f가 불연속임을 보이시오.

6. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 다음과 같이 정의되어 있다.
$$f(x)=\begin{cases}x & \text{if } x\in\mathbb{Q}\\ 2-x & \text{if } x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$
이때 f가 1에서만 연속이고 다른 모든 점에서는 불연속임을 보이시오.

7. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 다음과 같이 정의되어 있다.
$$f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{if } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{if } x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$
이때 f가 0에서만 연속이고 다른 모든 점에서는 불연속임을 보이시오.

8. 함수 $f:(-1,\ 1)\to\mathbb{R}$가 0에서 연속이고, 열린구간 $(-1,\ 1)$의 모든 점 x에서 $f(x)=f(x^2)$을 만족시킨다. 이때 함수 f가 구간 $(-1,\ 1)$에서 상수함수임을 보이시오.

9. 함수 f가 $f(x)=[x]\sin(\pi x)$라고 정의되어 있다. 이때 f가 모든 실수에서 연속임을 보이시오. (단, $[\ \cdot\ ]$는 최대정수함수를 나타낸다.)

10. I가 열린구간이고 $c\in I$이며 함수 f가 I에서 정의되어 있다고 하자. 만약 f가 c에서 연속이면, c를 원소로 갖는 열린구간 J가 존재하여 f가 J에서 유계가 됨을 보이시오.

더 깊이 공부하고 싶은 사람을 위한 문제

11. $\{a_n\}$이 실수열이고 L이 실수라고 하자. 이때 $\{a_n\}$이 L에 수렴하기 위한 필요충분조건은 L을 원소로 갖는 임의의 열린구간 I에 대하여 [$a_n \notin I$인 n의 개수가 유한]인 것임을 보이시오.

12. 임의의 실수열은 단조인 부분수열을 가짐을 보이시오.

13. 함수 f를 다음과 같이 정의한다.

    x가 유리수이고 $x = \dfrac{p}{q}$이며 $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$이고 p와 q가 서로소일 때 $f(x) = \dfrac{1}{q}$;

    x가 무리수일 때 $f(x) = 0$.

    이와 같이 정의된 함수 f를 **토마에 함수**(Thomae's function) 또는 **팝콘 함수**(popcorn function)라고 부른다. 다음 물음에 답하시오.

    (1) f가 주기가 1인 주기함수임을 보이시오.
    (2) 유리수인 점에서 f가 불연속임을 보이시오.
    (3) 무리수인 점에서 f가 연속임을 보이시오.

수학을 사랑하는 사람을 위한 문제

1. I가 길이가 양수인 구간이고 함수 f가 I에서 정의되어 있다고 하자. 만약 임의의 양수 ϵ에 대하여 양수 δ가 존재하여 $|x_1 - x_2| < \delta$인 I의 임의의 원소 x_1, x_2에 대하여 $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$이 성립하면 "$f$는 I에서 **균등연속이다**(uniformly continuous)."라고 말한다. 즉 f가 I에서 균등연속이라 함은

    $$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_1 \in I\ \forall x_2 \in I : (|x_1 - x_2| < \delta \rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon)$$

    이 성립하는 것을 뜻한다. 다음 물음에 답하시오.

    (1) 함수 f가 구간 I에서 균등연속이면 f가 I에서 연속임을 보이시오.
    (2) 함수 $f(x) = 2x$는 $\mathbb{R}$에서 균등연속임을 보이시오.
    (3) 함수 $f(x) = x^2$은 $\mathbb{R}$에서 연속이지만 $\mathbb{R}$에서 균등연속은 아님을 보이시오.
    (4) 함수 $f(x) = x^2$이 닫힌구간 $[0, 2]$에서 균등연속임을 보이시오.
    (5) 함수 $f(x) = 1/x$은 구간 $(0, 2)$에서 연속이지만 이 구간에서 균등연속은 아님을 보이시오.

2. I가 길이가 양수인 닫힌구간이고 함수 f가 I에서 연속이라고 하자. 이때 f가 I에서 균등연속임을 보이려고 한다. 다음 물음에 답하시오.

    (1) f가 I에서 균등연속이 아니라고 가정하고, 다음을 만족시키는 양수 ϵ이 존재함을 설명하시오:
    "임의의 양수 δ에 대하여, $|s-t| < \delta$이지만 $|f(s) - f(t)| \geq \epsilon$인 점 s와 t가 I에 존재한다."
    (2) 임의의 자연수 n에 대하여

    $$|f(s_n) - f(t_n)| \geq \epsilon \text{이면서 } |s_n - t_n| < \frac{1}{n}$$

    을 만족시키고, 모든 항이 I에 속하는 수열 $\{s_n\}$과 $\{t_n\}$이 존재함을 보이시오.
    (3) 두 수열 $\{s_n\}$과 $\{t_n\}$의 부분수열 중에서 같은 값에 수렴하는 수열 $\{s_k'\}$, $\{t_k'\}$이 존재함을 보이시오.
    (4) 수열 $\{s_k'\}$의 극한을 a라고 하자. 이때 $a \in I$임을 보이시오.
    (5) f가 a에서 연속이라는 사실을 사용하여 모순을 유도하시오.

3. I가 길이가 양수인 열린구간이고 함수 f가 I에서 정의되어 있다고 하자.
   (1) 만약 f가 I에서 연속이고 J가 열린구간이면, 집합 $f^{-1}(J)=\{x\in I \mid f(x)\in J\}$가 열린집합임을 보이시오.
   (2) (1)에서 'J가 열린구간이면'을 'J가 열린집합이면'으로 바꾸어도 같은 결과를 얻을 수 있음을 보이시오.
   (3) (2)의 역이 성립함을 보이시오. 즉 J가 열린집합일 때마다 $f^{-1}(I)=\{x\in I \mid f(x)\in J\}$가 열린집합이면, 함수 f가 I에서 연속임을 보이시오.

4. E가 $\mathbb{R}$의 부분집합이고 유계이며 무한집합이라고 하자. 이때 E의 집적점이 존재함을 보이시오. 이 정리를 집합에 대한 **볼차노-바이어슈트라스 정리**(Bolzano-Weierstrass theorem)라고 부른다.

5. I가 길이가 양수인 구간이고 함수 f가 I에서 정의되어 있다고 하자. 또한 구간 I에서 함수 f가 단조라고 하자. 다음 물음에 답하시오.
   (1) I의 점 중에서 f가 불연속인 점은 모두 f의 단순불연속점임을 보이시오.
   (2) I가 닫힌구간이면 I의 점 중에서 f가 불연속인 점의 집합이 가산집합임을 보이시오.
   (3) I가 열린구간일 때도 I의 점 중에서 f가 불연속인 점의 집합이 가산집합임을 보이시오.

6. $\{a_n\}$이 실수열이라고 하자. 만약 임의의 양수 ϵ에 대하여 자연수 N이 존재하여 $n>N$, $m>N$인 모든 n과 m에 대하여 $|a_n-a_m|<\epsilon$이 성립하면, $\{a_n\}$을 **코시 수열**(Cauchy sequence)이라고 부른다.[33] 즉 $\{a_n\}$이 코시 수열이라는 것은

$$\forall \epsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}\ \forall m\in\mathbb{N} : \left[(n>N \wedge m>N) \rightarrow |a_n-a_m|<\epsilon\right]$$

   이 성립하는 것이다.
   (1) $\{a_n\}$이 수렴하는 수열이면 $\{a_n\}$이 코시 수열임을 보이시오.
   (2) $\{a_n\}$이 코시 수열이면 $\{a_n\}$이 유계임을 보이시오.
   (3) $\{a_n\}$이 유계인 코시 수열이면 $\{a_n\}$이 수렴함을 보이시오.

7. I가 길이가 양수인 구간이고 $\{f_n\}$이 정의역이 I인 함수로 이루어진 함수열이며 f가 $\{f_n\}$의 극한함수라고 하자. 만약

$$\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_\infty=0$$

   이면 "I에서 $\{f_n\}$이 f에 **균등수렴한다**(converges uniformly)."라고 말한다. 구간 I와 함수열 $\{f_n\}$이 다음과 같이 주어졌을 때, I에서 $\{f_n\}$의 극한함수 f를 구하고 $\{f_n\}$이 f에 균등수렴하는지 판별하시오.
   (1) $I=[0,\ 0.5]$, $f_n(x)=x^n$
   (2) $I=[0,\ 1]$, $f_n(x)=x^n$
   (3) $I=\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^3-\dfrac{4x}{n}$
   (4) $I=(0,\ 1]$, $f_n(x)=nx(1-x)^n$
   (5) $I=[0,\ 1]$, $f_n(x)=\dfrac{nx^2}{1+nx}$
   (6) $I=(0,\ 1]$, $f_n(x)=\dfrac{1}{nx+1}$

---

33) 코시(Augustin Louis Cauchy, 1789-1857)는 프랑스의 수학자이다.

8. I가 길이가 양수인 구간이고 $\{f_n\}$이 정의역이 I인 함수로 이루어진 함수열이라고 하자. 또한 f가 $\{f_n\}$의 극한함수이고 $\{f_n\}$이 f에 균등수렴한다고 하자. 만약 $\{f_n\}$의 모든 항이 I에서 연속이면 극한함수 f도 I에서 연속임을 보이시오.

9. 다음 개념을 조사해 보자.
   (1) 수열의 상극한과 하극한 (limit superior, limit inferior)
   (2) 함수의 상극한과 하극한
   (3) 함수의 상반연속과 하반연속 (upper semicontinuity, lower semicontinuity)

10. 다음을 조사해 보자.
   (1) 콤팩트 집합 (compact set)
   (2) 하이네-보렐 정리 (Heine-Borel theorem)

11. 다음을 조사해 보자.
   (1) 함수열의 동정도연속 (equicontinuity)
   (2) 아첼라-애스콜리 정리 (Arzelà-Ascoli theorem)

12. 다음을 조사해 보자.
   (1) 칸토어 집합 (Cantor's ternary set)
   (2) 칸토어 함수 (Cantor's ternary function; Devil's staircase)

영어로 표현하기 (연속함수)

☐ Continuity of real functions is usually defined in terms of limits. A function f with variable x is continuous at the real number c, if the limit of $f(x)$, as x tends to c, is equal to $f(c)$, provided that the limit of $f(x)$ as $x \to c$ exists.

☐ If f is not continuous at c, then f is said to be discontinuous at c.

☐ If a function f is continuous at all the points of an interval I, then f is said to be continuous on I.

☐ If I is a closed, bounded interval and a function f is continuous on I, then f is bounded on I. Moreover f has both a maximum and a minimum on I.

☐ Suppose that $a < b$ and that f is continuous on $[a, b]$. If k lies between $f(a)$ and $f(b)$, then there is an element $c \in (a, b)$ such that $f(c) = k$.

☐ If f and g are continous functions, and if the composition $g \circ f$ is defined, then $g \circ f$ is also a continuous function.

☐ Every bounded sequence of real numbers has a convergent subsequence.

☐ Find all the values of x at which $f(x) = [x]x$ is discontinuous.

☐ Find the maximum value of b that makes $f(x) = [x^2]$ continuous on $[-b, b]$.

여섯 번째 이야기

미분과 도함수

등속직선운동하는 물체의 시각에 따른 위치를 그래프로 나타내면 직선이 되며, 그래프의 기울기는 물체의 속도가 된다. 시각에 따라 물체의 속도가 변한다면 시각에 따른 위치 그래프의 기울기가 일정하지 않으므로 길이가 아주 작은 구간에서 그래프의 기울기를 생각해야 하는데 이때 미분이 필요하다.

함수의 독립변수의 변화와 종속변수의 변화의 관계를 분석할 때 미분은 중요한 도구가 된다. 또한 다루기 까다로운 함수를 다루기 쉬운 꼴로 변환할 때도 미분이 사용된다.

이 단원에서는 미분과 도함수를 정의하고 그와 관련된 기본 성질을 살펴보자.

1 미분계수

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때, y의 값은 $f(a)$에서 $f(b)$까지 변한다.

이때 x의 값의 증가량 $b-a$를 **x의 증분**(increment of x)이라고 부르고, y의 값의 증가량 $f(b)-f(a)$를 **y의 증분**(increment of y)이라고 부른다. x의 증분과 y의 증분을 각각

$$\boldsymbol{\Delta x},\quad \boldsymbol{\Delta y}$$

"델타 x" "델타 y"

와 같이 나타낸다. 즉

$$\Delta x = b-a,$$
$$\Delta y = f(b)-f(a) = f(a+\Delta x)-f(a)$$

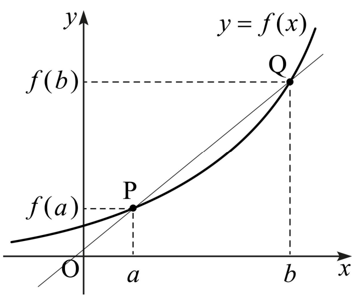
이다.

또 $\Delta x \neq 0$일 때,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

를 x의 값이 a에서 b까지 변할 때 함수 $y=f(x)$의 **평균변화율**(average rate of change)이라고 부른다.

평균변화율은 두 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$, $\mathrm{Q}(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기와 같다.



보기 1. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 $f(x)=x^2-x$라고 정의되어 있을 때, 다음을 구해보자.

(1) x의 값이 1에서 4까지 변할 때 함수 $y=f(x)$의 평균변화율

(2) x의 값이 2에서 $2+\Delta x$까지 변할 때 함수 $y=f(x)$의 평균변화율 (단, $\Delta x \neq 0$)

풀이

(1) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=\dfrac{12-0}{4-1}=4.$

(2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\dfrac{\{2+3\Delta x+(\Delta x)^2\}-2}{\Delta x}=3+\Delta x.$

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변할 때의 평균변화율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

를 생각하자. 여기서 $\Delta x \to 0$일 때, 평균변화율의 극한값

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

가 존재하면 "함수 f가 a에서 **미분 가능하다.**"라고 말한다. 이때 이 극한값을 a에서 함수 f의 **순간변화율**(instantaneous rate of change) 또는 **미분계수**(derivative)라고 부르고, 이 값을 기호로 $\boldsymbol{f'(a)}$와 같이 나타낸다. "f 프라임 a"

한편

$$f'(a)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

에서 $a+\Delta x=x$라고 하면 $\Delta x=x-a$이고, $\Delta x \to 0$일 때 $x \to a$이므로

$$f'(a)=\lim_{x \to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

와 같이 나타낼 수 있다.

I가 길이가 양수인 구간이고 f가 I에서 정의된 함수라고 하자. 만약 f가 구간 I에 속하는 모든 x에서 미분 가능하면 "함수 f가 I에서 **미분 가능하다**(differentiable)."라고 말한다. 특히 함수 f가 정의역에 속하는 모든 x에서 미분 가능하면 f를 **미분 가능한 함수**라고 부른다.

보기 2. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 $f(x)=2x^2+1$이라고 정의되어 있을 때, 1에서 f의 미분계수를 구하면 다음과 같다.

$$f'(1)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\{2(1+\Delta x)^2+1\}-(2\times 1^2+1)\}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{4\Delta x+2(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}(4+2\Delta x)=4.$$

1에서 f의 미분계수는 다음과 같은 방법으로 구할 수도 있다.

$$f'(1)=\lim_{x \to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x \to 1}\frac{(2x^2+1)-(2\times 1^2+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x \to 1}\frac{2(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x \to 1}2(x+1)=4.$$

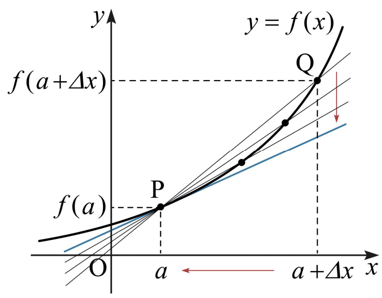
함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변할 때, 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

이다. 이것은 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점

$$\mathrm{P}(a,\ f(a)),\quad \mathrm{Q}(a+\Delta x,\ f(a+\Delta x))$$

를 지나는 직선 PQ의 기울기와 같다.



여기서 점 P를 고정하고 $\Delta x \to 0$인 극한을 취하면 점 Q는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 따라 점 P에 한없이 가까워지고, 직선 PQ는 점 P를 지나면서 기울기가 $f'(a)$인 직선 ℓ에 한없이 가까워진다.

이 직선 ℓ을 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서 접하는 **접선**(tangent)이라고 부르고, 점 P를 이 접선의 **접점**(point of tangency)이라고 부른다.

보기 3. 곡선 $y=2x^2-x+3$ 위의 점 $(1,\ 4)$에서 이 곡선에 접하는 접선의 방정식을 구해 보자.

$f(x)=2x^2-x+3$이라고 하면

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{2(1+\Delta x)^2-(1+\Delta x)+3\}-\{2\times 1^2-1+3\}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(\Delta x)^2+3\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2\Delta x+3)=2 \end{aligned}$$

이므로 구하는 접선의 기울기는 2이다.
또한 $f(1)=2-1+3=4$이므로 접점은 $(1,\ 4)$이다.
그러므로 구하는 접선의 방정식은 $y=2(x-1)+4$ 즉 $y=2x+2$이다.

함수 f가 a에서 미분 가능하면 미분계수

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

가 존재하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\} &= \lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times(x-a)\right\} \\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\lim_{x\to a}(x-a)=f'(a)\times 0=0 \end{aligned}$$

즉

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

이다. 그러므로 함수 f는 a에서 연속이다.

정리 1. 함수 f가 길이가 양수인 구간 I에서 정의되어 있고 a가 I의 점이라고 하자.
만약 f가 a에서 미분 가능하면 f는 a에서 연속이다.

참고 정리 1의 역은 성립하지 않는다. 즉 함수 f가 a에서 연속일지라도 f가 a에서 미분 가능하지 않을 수 있다. 예컨대 $f(x)=|x|$라고 하면 f는 $\mathbb{R}$에서 연속이지만

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{-x}{x}=-1,$$

이므로 f는 $x=0$에서 미분 불가능하다. □

2 도함수

함수 f가 정의역 X의 모든 점에서 미분 가능할 때, 점 x에 미분계수 $f'(x)$를 대응시키는 새로운 함수

$$f' : X \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

를 얻을 수 있다. 이때 이 함수 f'을 함수 f의 **도함수**(derivative)라고 부르고, 이것을 기호로

$$\boxed{f', \quad y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d}{dx}f}$$

와 같이 나타낸다. "f 프라임" "y 프라임" "d y d x" "d d x f"

만약 함수 f의 정의역 X의 점 중에서 f가 미분 가능하지 않은 점이 있다면, f가 미분 가능한 점만 모은 집합이 f'의 정의역인 것으로 약속한다.

함수 f에서 도함수 f'을 구하는 것을 "함수 f를 **미분한다**."라고 표현한다. 특히 함수 f에서 x를 변수로 두어 함수식을 $f(x)$와 같이 나타냈을 때, f의 도함수의 함수식 $f'(x)$를 구하는 것을 "$f(x)$를 **x에 대하여 미분한다**(differentiate with respect to x)."라고 표현한다.

보기 4. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + x + 1$의 도함수를 구해 보자.

함수 f의 정의역에 있는 임의의 점 x에 대하여

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\{3(x+h)^2 + (x+h) + 1\} - (3x^2 + x + 1)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3h^2 + 6xh + h}{h} = 6x + 1 \end{aligned}$$

이다. 그러므로 f는 모든 점 x에서 미분 가능하고, 도함수는 $f(x) = 6x + 1$이다.

보기 5. 함수 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$의 도함수를 구해 보자.

x가 양수일 때는

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1$$

이고, x가 음수일 때는

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-x-h+x}{h} = -1$$

이다. 또한 g는 0에서 미분 불가능하다. 그러므로 g의 도함수는 정의역이 $\{x \mid x \neq 0\}$이고

$$g'(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } x < 0, \\ 1 & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

인 함수이다.

이제 자주 사용하는 도함수 공식을 살펴보자.

먼저 n이 2 이상인 정수일 때 함수 $f(x)=x^n$의 도함수를 구해 보자.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)-x\}\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+x^{n-1}\}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+x^{n-1}\} = \underbrace{x^{n-1}+x^{n-1}+\cdots+x^{n-1}}_{n\text{개}} = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

또 $f(x)=x$의 도함수를 구하면 다음과 같다.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}=1.$$

한편 상수함수 $f(x)=c$의 도함수는 다음과 같다.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=0.$$

이 내용을 정리하면 다음과 같다.

정리 2. 함수 $f(x)=c$와 $f(x)=x^n$은 모두 미분 가능하고, 그 도함수는 다음과 같다.

(1) $f(x)=c$이고 c가 상수이면, $f'(x)=0$.

(2) $f(x)=x$이면 $f'(x)=1$.

(3) $f(x)=x^n$이고 n이 2 이상인 정수이면 $f'(x)=nx^{n-1}$. [‘power rule’이라고 부른다.]

다음으로 사칙계산과 관련된 미분 공식을 살펴보자.

함수 f가 미분 가능하고 k가 상수일 때 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \{kf(x)\}' &= \lim_{h\to 0}\frac{kf(x+h)-kf(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{k\{f(x+h)-f(x)\}}{h} \\ &= k\times\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= kf'(x). \end{aligned}$$

함수 f와 g가 미분 가능할 때 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \{f(x)+g(x)\}' &= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)+g(x+h)\}-\{f(x)+g(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= f'(x)+g'(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{f(x)-g(x)\}' &= \{f(x)+(-1)g(x)\}' \\ &= f'(x)+\{(-1)g(x)\}' \\ &= f'(x)+(-1)g'(x)=f'(x)-g'(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{f(x)g(x)\}' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\times\lim_{h\to 0}g(x+h)+\lim_{h\to 0}f(x)\times\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x).\end{aligned}$$

정리 3. 함수 f와 g가 미분 가능하고 k가 상수일 때 kf, $f+g$, $f-g$, fg는 모두 미분 가능하고 그 도함수는 다음과 같다.

(1) $\{kf(x)\}'=kf'(x)$

(2) $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

(3) $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

(4) $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ ['product rule'이라고 부른다.]

정리 2와 정리 3에 의하면, 다항함수

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$$

의 도함수는 다음과 같다.

$$f'(x)=na_n x^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1.$$

보기 6. 정리 3의 (1)~(3)을 사용하여 도함수를 구하는 예를 살펴보자.

(1) $f(x)=x^4$일 때 $f'(x)=4x^3$.

(2) $g(x)=-6x^3$일 때 $g'(x)=-6\times 3x^2=-18x^2$.

(3) $h(x)=4x^3+x-5$일 때 $h'(x)=4\times 3x^2+1-0=12x^2+1$.

보기 7. 다항함수 $f(x)=(x^2+3x+2)(x^4+5)$의 도함수를 구해 보자.

정리 3의 (4)를 사용하면 다음과 같이 f의 도함수를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}f'(x) &= (2x+3)(x^4+5)+(x^2+3x+2)\times 4x^3 \\ &= 2x^5+10x+3x^4+15+4x^5+12x^4+8x^3 \\ &= 6x^5+15x^4+8x^3+10x+15.\end{aligned}$$

함수 g가 미분 가능할 때, $g(x) \neq 0$인 점 x에서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{g(x)}\right\} &= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\frac{1}{g(x+\Delta x)}-\frac{1}{g(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{-\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{g(x+\Delta x)g(x)}}{\Delta x}\\ &= -\lim_{\Delta x \to 0}\left\{\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)} \times \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right\}\\ &= -\lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)} \times \lim_{\Delta x \to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\\ &= -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}.\end{aligned}$$

함수 f와 g가 미분 가능할 때, $g(x) \neq 0$인 점 x에서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\} &= \frac{d}{dx}\left\{f(x) \times \frac{1}{g(x)}\right\}\\ &= f'(x) \times \frac{1}{g(x)} + f(x) \times \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{g(x)}\right\} = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}\\ &= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}.\end{aligned}$$

정리 4. 함수 f와 g가 미분 가능할 때 $g(x) \neq 0$인 점 x에서 $1/g$과 f/g가 미분 가능하고 그 도함수는 다음과 같다.

(1) $\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{g(x)}\right\} = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

(2) $\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$ ['quotient rule'이라고 부른다.]

보기 8. 분수함수의 도함수를 구하는 예를 살펴보자.

(1) $f(x) = \frac{1}{x}$일 때 $f'(x) = \frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$.

(2) $g(x) = \frac{x+3}{x^2-4x+5}$일 때 $g'(x) = \frac{(x^2-4x+5)-(x+3)(2x-4)}{(x^2-4x+5)^2} = \frac{-x^2-2x+17}{(x^2-4x+5)^2}$.

보기 9. n이 음의 정수일 때 $y = x^n$의 도함수를 구해 보자.

$n = -m$이라고 두면 m은 자연수이고

$$y = x^n = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$$

이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^m}\right) = \frac{-mx^{m-1}}{(x^m)^2} = \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}$$

이다. 이 공식은 **정리 2**의 (3)에서 n이 2 이상인 자연수일 때 살펴본 공식과 일치한다.

3 이계도함수

함수 $y=f(x)$의 도함수 f'이 미분 가능할 때, f'의 도함수

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

를 f의 **이계도함수**(second derivative)라고 부르고, 이것을 기호로

$$f'', \quad y'', \quad \frac{d^2 y}{(dx)^2}, \quad \frac{d^2}{(dx)^2} f$$

와 같이 나타낸다.

이계도함수를 한 번 더 미분한 함수를 **삼계도함수**(third derivative)라고 부르며, 기호로

$$f''', \quad y''', \quad \frac{d^3 y}{(dx)^3}, \quad \frac{d^3}{(dx)^3} f$$

와 같이 나타낸다.

일반적으로 n이 자연수이고 함수 f가 n번 이상 미분 가능할 때, f를 n번 미분한 함수를 f의 **n계도함수**(nth derivative)라고 부르고, 기호로

$$f^{(n)}, \quad y^{(n)}, \quad \frac{d^n y}{(dx)^n}, \quad \frac{d^n}{(dx)^n} f$$

와 같이 나타낸다. 또한 n계도함수의 함숫값을 **n계미분계수**라고 부른다.

보기 **10.** 다항함수 f가 $f(x)=-3x^4+2x^3-5x^2-6x+4$라고 정의되어 있다면

$$\begin{aligned} f'(x) &= -12x^3+6x^2-10x-6, \\ f''(x) &= -36x^2+12x-10, \\ f'''(x) &= -72x+12, \\ f^{(4)}(x) &= -72, \\ f^{(5)}(x) &= 0, \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= 0 \quad (n \geq 5) \end{aligned}$$

이다.

구간 I에서 미분 가능한 함수의 모임을 $D(I)$로 나타낸다. 또한 n이 자연수일 때 구간 I의 모든 점에서 n번 이상 미분 가능한 함수의 모임을 $D^n(I)$로 나타낸다.

구간 I의 모든 점에서 연속인 함수의 모임을 $C(I)$로 나타낸다. 또한 n이 자연수일 때, 구간 I의 모든 점에서 n번 이상 미분 가능하고 n계도함수가 연속인 함수의 모임을 $C^n(I)$로 나타낸다. 특히 구간 I의 모든 점에서 임의 횟수로 미분 가능한 함수의 모임을 $C^\infty(I)$로 나타낸다.

이들 집합 사이에는 다음과 같은 포함관계가 있다.

$$C(I) \supsetneq D(I) \supsetneq C^1(I) \supsetneq D^2(I) \supsetneq C^2(I) \supsetneq D^3(I) \supsetneq \cdots \supsetneq C^\infty(I).$$

연습문제

개념에 익숙해지기 위한 문제

1. 미분계수의 정의를 사용하여 다음을 구하시오.

(1) $f(x)=x^2+1$일 때 $f'(3)$.

(2) $f(x)=x^3$일 때 $f'(2)$.

(3) $f(x)=x^3+3x+1$일 때 $f'(0)$.

(4) $f(x)=x^2+2x+2$일 때 $f'(0)$.

(5) $f(x)=\dfrac{1}{2x+5}$일 때 $f'(3)$.

(6) $f(x)=\sqrt{2x-1}$일 때 $f'(4)$.

(7) $f(x)=\sqrt{5-x}$일 때 $f'(2)$.

(8) $f(x)=\dfrac{1}{7-2x}$일 때 $f'(3)$.

2. 함수 f가 1에서 미분 가능하고 $f'(1)=2$일 때 다음을 구하시오.

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{h}$

(2) $\displaystyle\lim_{k\to 0}\frac{f(1-4k)-f(1)}{k}$

(3) $\displaystyle\lim_{p\to 0}\frac{f(1+3p)-f(1-2p)}{p}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}$

3. 미분의 정의와 함수의 극한을 사용하여 $f'(x)$를 구하시오.

(1) $f(x)=3x+1$

(2) $f(x)=-x+11$

(3) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

(4) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

(5) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

(6) $f(x)=-1+\dfrac{2}{x-2}$

(7) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

(8) $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$

(9) $f(x)=\sqrt{x+2}$

(10) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

(11) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(12) $f(x)=x\sqrt{x}$

4. 다음은 점 a에서 함수 f의 미분계수 $f'(a)$를 나타내는 극한이다. 이때 $f(x)$와 a를 구하시오.
(답이 여러 가지가 나올 수 있다.)

(1) $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x}$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3-8}{h}$

(3) $\displaystyle\lim_{k\to 0}\frac{\frac{1}{10+k}-0.1}{k}$

(4) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{(64+t)^{1/3}-4}{t}$

(5) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{9+h}-3}{h}$

(6) $\displaystyle\lim_{s\to 0}\frac{(1+s)^{-1/2}-1}{s}$

5. 함수 $y=2x^3+x^2-1$의 그래프 위의 점 $(1,\ 2)$에서 이 그래프에 접하는 직선의 방정식을 구하시오.

6. 정리 2의 (3)을 수학적 귀납법을 사용하여 증명하시오.

개념을 다지기 위한 문제

7. 함수 $y=-x^3+6x^2-8$의 그래프에 접하는 직선의 기울기의 최댓값을 구하시오.

8. a가 상수이고 함수 f가 $f(x)=(x-a)(x^2-4x+3)$이라고 정의되어 있으며 $f'(a)=-1$이다. 이때 $f'(1)$을 구하시오.

9. 함수 f가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$f(x)=\begin{cases} ax^2-2x & \text{if } x \geq 1 \\ 2x^2+b & \text{if } x<1. \end{cases}$$

이때 f가 1에서 미분 가능하도록 하는 상수 a와 b의 값을 구하시오.

10. 함수 f가 모든 실수에서 미분 가능하고, 그래프 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ f(2))$에서 이 그래프에 접하는 접선의 기울기가 4이다. 이때 다음 극한을 구하시오.

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x^3-8}$$

11. 함수 f가 4에서 미분 가능하고 다음을 만족시킨다.

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-1}{x-4}=5$$

이때 $f'(4)$를 구하시오.

12. 함수 f가 다항함수이고 $f(1)=5,\ f'(1)=2$이다. 이때 다음 극한을 구하시오.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3f(1)-f(x^3)}{x-1}$$

13. 함수 f가 $f(x)=x^3+ax+b$라고 정의되어 있으며 다음을 만족시킨다.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x+1)-3}{x^2-1}=4$$

이때 상수 a와 b의 값을 구하시오.

14. 함수 f가 다항함수이고 $f(3)=1,\ f'(3)=-2$이다. 이때 다음 극한을 구하시오.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9f(x)}{x-3}$$

15. 함수 f가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+3x-10}{x-2} & \text{if } x \neq 2 \\ a+1 & \text{if } x=2. \end{cases}$$

이때 f가 2에서 미분 가능하도록 하는 상수 a의 값을 구하시오.

16. 함수 f가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$f(x)=\begin{cases} 2x+b & \text{if } x<1 \\ ax^2+x & \text{if } x \geq 1. \end{cases}$$

또한 함수 f가 1에서 미분 가능하다. 이때 $f(-1)$을 구하시오.

17. 함수 f가 $f(x)=ax^2+bx+2$라고 정의되어 있고 $f(1)=8,\ f'(-1)=0$이다. 이때 상수 a와 b의 값을 구하시오.

실력을 향상시키기 위한 문제

18. $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}+\cdots+\dfrac{1}{x^{10}}$일 때 $f'(1)$을 구하시오.

19. 함수 f가 다항함수이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=2x^3-x^2-xf'(2)$가 성립한다. 이때 $f'(-1)$을 구하시오.

20. 함수 f가 $f(x)=x^3+ax^2-4x+1$이라고 정의되어 있으며 다음을 만족시킨다.
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-3h)}{2h}=6$$
이때 상수 a의 값을 구하시오.

21. 함수 f가 실수 전체 구간에서 미분 가능하고, 임의의 실수 x, y에 대하여 다음을 만족시킨다.
$$f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy$$
$f'(0)=2$일 때, $f'(2)$를 구하시오.

22. 함수 $y=x^4-3x^2+6$의 그래프에 접하고 원점 O를 지나는 서로 다른 두 직선을 l, m이라고 하자. 또한 두 직선 l, m과 함수 $y=x^4-3x^2+6$의 그래프의 접점을 각각 A, B라고 하자. 이때 삼각형 OAB의 넓이를 구하시오.

더 깊이 공부하고 싶은 사람을 위한 문제

23. 미분계수와 도함수를 나타내는 다양한 표기법을 조사해 보자.

24. **미분소**(differential)의 개념을 조사해 보자.

25. 모든 점에서 연속이지만 어느 점에서도 미분 가능하지 않은 함수를 조사해 보자.
[바이어슈트라스 함수(Weierstrass function)를 검색해 보자.]

수학을 사랑하는 사람을 위한 문제

1. I가 길이가 양수인 열린구간이고 $D(I)$가 I에서 정의된 미분 가능한 함수들의 모임이며, F가 I에서 정의된 함수들의 모임이라고 하자. 또한 실수 k와 함수 f, g에 대하여 통상적인 실수배 kf와 함수의 합 $f+g$가 정의되어 있다고 하자.
(1) $D(I)$가 $\mathbb{R}$ 위에서 벡터공간이며, F의 부분공간임을 보이시오.
(2) $\phi(f)=f'$일 때 ϕ가 $D(I)$로부터 F로의 선형변환임을 보이시오.

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = \frac{\cancel{d}}{\cancel{d}x}\frac{1}{x} = \frac{}{x}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

일곱 번째 이야기

여러 가지 미분법

앞 단원에서 미분계수와 도함수를 정의하였고, 사칙계산과 관련된 미분 공식을 살펴보았다. 이와 같은 공식을 사용하여 도함수를 구할 수 있는 함수는 다항함수와 유리함수로서 매우 한정적이다.

이 단원에서는 다양한 함수의 도함수를 구하기 위해 필요한 여러 가지 미분법을 살펴보자.

1 합성함수의 미분법

함수 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가

$$F(x)=(3x+5)^4$$

이라고 정의되어 있다고 하자. 이 함수의 도함수는 어떻게 구할까?

먼저 생각할 수 있는 방법으로는 $(3x+5)^4$을 전개하는 것이다. 그러나 이 방법은 효율적이지 못하다. 만약

$$F(x)=(3x+5)^4=(3x+5)(3x+5)(3x+5)(3x+5)$$

라고 두고, 곱의 미분법을 사용하면 어떨까?

$$\begin{aligned}F'(x)=&\,3\times(3x+5)(3x+5)(3x+5)\\&+(3x+5)\times 3\times(3x+5)(3x+5)\\&+(3x+5)(3x+5)\times 3\times(3x+5)\\&+(3x+5)(3x+5)(3x+5)\times 3\\=&\,4(3x+5)^3\times 3.\end{aligned}$$

여기서 $4(3x+5)^3$은 $(3x+5)^4$에서 $(3x+5)$를 하나의 문자라고 생각하고 미분한 결과와 같고, 뒤에 곱한 3은 $(3x+5)$를 미분한 결과와 같다.

일반적으로, f가 미분 가능한 함수이고 n이 2 이상인 자연수이며

$$F(x)=\{f(x)\}^n$$

일 때 F의 도함수는 다음과 같다.

$$F'(x)=n\{f(x)\}^{n-1}\times f'(x).$$

더욱 일반적으로, 미분 가능한 두 함수 f와 g를 합성한 함수 $g\circ f$의 도함수는 다음과 같다.

정리 1. 함수 f와 g가 미분 가능하고 합성함수 $g\circ f$가 정의된다고 하자. 그러면 $g\circ f$는 미분 가능하며, 그 도함수는 다음과 같다.

$$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\times f'(x)\qquad (\text{단, } x\text{는 } f\text{의 정의역의 점})$$

이와 같은 공식을 **합성함수의 미분법** 또는 **연쇄법칙**(chain rule)이라고 부른다.

정리 1의 증명 $y=f(x)$라고 하자. 그리고 x_0이 f의 정의역의 점이며 $y_0=f(x_0)$이라고 하자. 함수 g의 정의역의 점 y에 대하여, 함수 h를 다음과 같이 정의하자.

$$h(y)=\begin{cases} \dfrac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}-g'(y_0) & \text{if } y\neq y_0, \\ 0 & \text{if } y=y_0. \end{cases}$$

그러면 함수 h는 y_0에서 연속인 함수이다. 왜냐하면

$$\lim_{y\to y_0} h(y)=\lim_{y\to y_0}\left\{\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}-g'(y_0)\right\}=g'(y_0)-g'(y_0)=0=h(y_0)$$

이기 때문이다. h가 y_0에서 연속이라는 사실을 사용하여 x_0에서 $g\circ f$의 미분계수를 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dx}(g\circ f)\right|_{x=x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0}\left\{g'(f(x_0))\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+h(f(x))\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right\} \\ &= g'(f(x_0))\times\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+h(y_0)\times\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\ &= g'(f(x_0))f'(x_0).\end{aligned}$$

그러므로 $g\circ f$는 x_0에서 미분 가능하며, x_0에서 $g\circ f$의 미분계수는

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)$$

이다. ■

보기 1. 다항함수 F가 $F(x)=(3x+5)^4$이라고 정의되어 있을 때, F의 도함수를 구해 보자.

$f(x)=3x+5$, $g(x)=x^4$으로 두면 $F(x)=g(f(x))$이므로

$$F'(x)=g'(f(x))f'(x)=4\{f(x)\}^3\times 3=12(3x+5)^4.$$

합성함수의 미분법은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$y=g(f(x))$이고 $y=g(u)$와 $u=f(x)$가 미분 가능할 때

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}.$$

보기 2. 함수 $y=(3x^2-x+4)^7$의 도함수를 구해 보자.

$y=g(u)=u^7$, $u=f(x)=3x^2-x+4$라고 하면 g와 f는 미분 가능하고 $y=g(f(x))$이므로, 구하는 도함수는 다음과 같다.

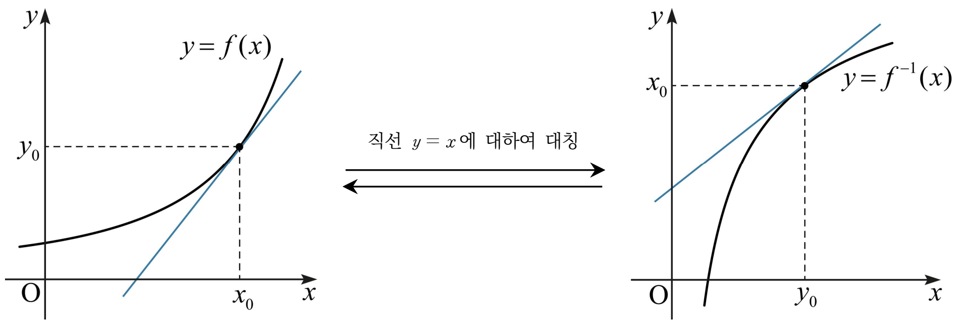
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=7u^6\times(6x-1)=7(3x^2-x+4)^6(6x-1).$$

2 역함수와 음함수의 미분법

구간에서 연속이고 순증가하거나 순감소하는 함수의 역함수 또한 연속임을 4단원에서 밝혔다. 여기서는 미분 가능한 함수의 역함수를 미분하는 방법을 살펴보자.

I가 길이가 양수인 구간이고 함수 f가 I에서 순증가하며 미분 가능한 함수라고 하자. I에서 f의 치역을 $J=\{f(x)\mid x\in I\}$라고 하자. 그러면 $f: I\to J$의 역함수 $f^{-1}: J\to I$가 존재하며, f^{-1}는 J에서 순증가하고 연속인 함수이다.

$y=f(x)$의 그래프가 점 $(x_0,\ y_0)$을 지난다고 하자. 함수의 그래프와 역함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로, 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 $(y_0,\ x_0)$을 지난다. 또한 점 $(x_0,\ y_0)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프에 접하는 접선의 기울기 $f'(x_0)$과 점 $(y_0,\ x_0)$에서 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프에 접하는 접선의 기울기 $(f^{-1})'(y_0)$은 서로 역수이다.



즉 $f'(x_0)\neq 0$인 점 x_0에서

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}$$

이다. 함수 f가 I에서 순감소하는 경우에도 똑같은 결과를 얻을 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

정리 2. I와 J가 길이가 양수인 구간이고 함수 $f: I\to J$가 일대일대응이며 순증가하거나 순감소하는 함수라고 하자. 또한 $x_0\in I$이며 $y_0=f(x_0)$이라고 하자. 만약 f가 x_0에서 미분 가능하고 $f'(x_0)\neq 0$이면, 역함수 f^{-1}는 y_0에서 미분 가능하며 f^{-1}의 미분계수는 다음과 같다.

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}$$

이 정리를 **역함수 정리**(inverse function theorem)라고 부른다.

보기 3. 함수 $y=\sqrt{x}$의 도함수를 구해 보자.

$x\geq 0$일 때 $f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt{x}$라고 정의하면 f와 g는 서로 역함수 관계이다.

$x>0$일 때 $f'(x)=2x\neq 0$이므로, 역함수 정리에 의하여 $x>0$인 점 x에서 g의 미분계수 $g'(x)$가 존재한다.

$x>0$일 때 g의 도함수를 구하면

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}=\frac{1}{2(g(x))}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

이다. 한편

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(0+\Delta x)-g(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{\Delta x}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\sqrt{\Delta x}-0}{\Delta x}=\infty$$

이므로 g는 0에서 미분 불가능하다.

보기 4. m이 2 이상인 자연수일 때 함수 $y=x^{\frac{1}{m}}$의 도함수를 구해 보자.

$x\geq 0$일 때 $f(x)=x^m$, $g(x)=x^{\frac{1}{m}}$이라고 정의하면 f와 g는 서로 역함수 관계이다.

$x>0$일 때 $f'(x)=mx^{m-1}$이므로, 역함수 정리에 의하여 $x>0$인 점 x에서 g의 미분계수 $g'(x)$가 존재한다. $x>0$일 때 g의 도함수를 구하면

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}=\frac{1}{m(g(x))^{m-1}}=\frac{1}{m\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1}}=\frac{1}{mx^{\frac{m-1}{m}}}=\frac{1}{m}x^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}$$

이다. 만약 $r=\frac{1}{m}$이라고 하면 $g(x)=x^r$의 도함수가 $g'(x)=rx^{r-1}$이므로, r가 정수일 때의 공식과 일치한다.

한편

$$\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{g(0+\Delta x)-g(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{(\Delta x)^{\frac{1}{m}}-0}{\Delta x}=\infty$$

이므로 g는 0에서 미분 불가능하다.

보기 5. r가 유리수이고 $r\neq 0$, $r\neq 1$이라고 하자. 이때 $x>0$인 범위에서 $h(x)=x^r$이라고 정의된 함수 h의 도함수를 구해 보자.

r가 정수인 경우는 앞 단원에서 $h'(x)=rx^{r-1}$임을 살펴보았다. 그러므로 r가 정수가 아닌 유리수인 경우만 살펴보면 된다.

r가 유리수이므로 $r=\frac{n}{m}$인 정수 n과 자연수 m이 존재한다. 특히 r가 정수가 아니므로 m은 1이 아닌 자연수이다. n과 m을 사용하여 $h(x)$의 식을 다시 쓰면

$$h(x)=x^r=\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^n$$

으로서 h는 미분 가능한 두 함수의 합성함수이다. 즉 $x>0$인 범위에서 h는 미분 가능하다.

또한 연쇄법칙과 **보기 4**의 결과를 사용하면

$$h'(x)=n\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{n-1}\times\left(\frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}\right)=\frac{n}{m}x^{\frac{n-1}{m}}\times x^{\frac{1-m}{m}}=\frac{n}{m}x^{\frac{n-m}{m}}=\frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}=rx^{r-1}$$

이다. 즉 $g(x)=x^r$의 도함수가 $g'(x)=rx^{r-1}$이므로, r가 정수일 때의 공식과 일치한다.

보기 6. 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $(3, 4)$에서 이 원에 접하는 접선의 기울기를 구해 보자.

함수 f를 $f(x)=\sqrt{25-x^2}$이라고 하면 $y=f(x)$의 그래프는 원 $x^2+y^2=25$의 위쪽 반원과 일치하며, 점 $(3, 4)$를 지난다.

한편 $f(x)=(25-x^2)^{\frac{1}{2}}$이므로 **보기 5**의 결과와 연쇄법칙을 사용하면

$$f'(x)=\frac{1}{2}(25-x^2)^{-\frac{1}{2}}\times(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$$

이다. 여기에 $x=3$을 대입하면

$$f'(3)=-\frac{3}{\sqrt{25-3^2}}=-\frac{3}{\sqrt{16}}=-\frac{3}{4}$$

이다. 이 값은 점 $(3, 4)$에서 $y=f(x)$의 그래프에 접하는 접선의 기울기이므로, 점 $(3, 4)$에서 원 $x^2+y^2=25$에 접하는 접선의 기울기와 같다.

보기 6의 원의 방정식 $x^2+y^2=25$에서 y는 x에 대한 함수가 아니다. 그러나

$$y\ge 0\text{일 때 } y=\sqrt{25-x^2},\quad y\le 0\text{일 때 } y=-\sqrt{25-x^2}$$

이고, 각각의 등식에서 y는 x의 함수가 된다.

이와 같이 방정식 $F(x, y)=0$에서 x와 y의 값의 범위를 적당히 정하여 y가 x의 함수가 되는 경우가 있다. 이와 같은 의미에서 x의 함수 y가 $F(x, y)=0$ 꼴로 주어질 때, 이를 함수 y에 대한 **음함수 표현**(implicit equation)이라고 부른다. 함수 y를 음함수로 나타내는 것은 곡선을 표현하는 방법 중 하나이다.

이와는 대조적으로 x의 함수 y가 $y=f(x)$의 꼴로 주어질 때, 이를 함수 y에 대한 **양함수 표현**(explicit form)이라고 부른다.[34)]

보기 6에서 원에 접하는 접선의 기울기를 구하기 위하여 음함수 표현을 양함수 표현으로 바꾸었다. 그러나 주어진 함수가 미분 가능하다는 사실이 보장된다면, 합성함수의 미분법을 사용하여 미분계수를 곧바로 구할 수 있다.

음함수 표현 $x^2+y^2=25$에서 y를 x의 함수로 보고 양변을 x에 대하여 미분하면 다음을 얻는다.

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0 \quad \text{즉} \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \quad (\text{단, } y\ne 0)$$

그러므로 이 식에 접점의 좌표인 $x=3$, $y=4$를 대입하면

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{4}$$

을 곧바로 얻는다.

일반적으로 음함수는 다음과 같이 미분한다.

음함수 미분법 (implicit differentiation)

함수 $y=f(x)$가 미분 가능하고 이 함수의 음함수 표현이 $F(x, y)=0$일 때, $F(x, y)=0$에서 y를 x의 함수로 보고 양변을 x에 대하여 미분하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

---

34) '음함수 표현'과 '양함수 표현'을 각각 '숨은 표현', '드러난 표현'이라고 부르기도 한다.

보기 7. y가 x의 함수이고 미분 가능하며 다음 식을 만족시킨다고 하자.

$$x^2+4xy^5+7xy+8=0$$

음함수 미분법을 사용하여 dy/dx를 구해 보자. 위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x+4y^5+20xy^4\frac{dy}{dx}+7y+7x\frac{dy}{dx}=0$$

즉

$$2x+4y^5+7y+\left(20xy^4+7x\right)\frac{dy}{dx}=0$$

이다. 그러므로

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+4y^5+7y}{20xy^4+7x}$$

이다. 이 식은 $20xy^4+7x\neq 0$인 x, y에 대하여 유효하다.

3 매개변수로 나타낸 함수의 미분법

두 변수 x, y의 관계를 새로운 변수 t를 사용하여

$$x=f(t),\quad y=g(t)$$

와 같이 나타낼 때, t를 **매개변수**(parameter)라고 부르고 위와 같은 표현으로 나타낸 함수를 **매개변수로 나타낸 함수**라고 부른다. 이와 같이 매개변수를 사용하여 x, y의 관계를 나타내는 것은 곡선을 표현하는 방법 중 하나이다.

두 함수 $f(t)$, $g(t)$가 미분 가능하고 $f'(t)\neq 0$이라고 하자. 연쇄법칙을 사용하면

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\times\frac{dx}{dt}$$

이고 $\dfrac{dx}{dt}\neq 0$이므로 다음이 성립한다.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

매개변수로 나타낸 함수의 미분법

두 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$가 t에 대하여 미분 가능하고 $f'(t)\neq 0$이면 dy/dx는 다음과 같다.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

보기 8. 매개변수 t로 나타낸 함수 $x=-3t+2$, $y=-2t^2+3$에서 $\dfrac{dy}{dx}$를 구해 보자.

$x=-3t+2$를 t에 대하여 풀면 $t=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$이므로 y를 x에 대한 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$y=-2t^2+3=-2\left(-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)^2+3=-\frac{2}{9}x^2+\frac{8}{9}x+\frac{19}{9}.$$

따라서 다음을 얻는다.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{4}{9}x+\frac{8}{9}.$$

다른 방법으로 구해 보자. 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 사용하여 계산하면 다음과 같다.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{-4t}{-3}=\frac{4}{3}t$$

얼핏 보면 두 결과가 달라 보인다. 하지만

$$-\frac{4}{9}x+\frac{8}{9}=-\frac{4}{9}(-3t+2)+\frac{8}{9}=\frac{4}{3}t-\frac{8}{9}+\frac{8}{9}=\frac{4}{3}t$$

이므로 두 가지 방법으로 구한 결과가 일치한다.

연습문제

개념에 익숙해지기 위한 문제

1. 다음과 같이 정의된 함수 f의 도함수를 구하시오.

(1) $f(x)=(x+4)^5$ (2) $f(x)=(3x-2)^4$

(3) $f(x)=\left(x^2+2x+3\right)^4$ (4) $f(x)=\left(-3x^2+4x-5\right)^3$

(5) $f(x)=\left\{\dfrac{1}{x+2}\right\}^3$ (6) $f(x)=\dfrac{(x+3)^2}{(x+4)(x-3)}$

(7) $f(x)=\sqrt{2x+7}$ (8) $f(x)=\left(4x^2-3\right)^2(x+5)^3$

(9) $f(x)=\sqrt{4-\sqrt{x+1}}$ (10) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2+2}$

2. 다음 함수의 이계도함수 y''을 구하시오.

(1) $y=\sqrt{x+5}$ (2) $y=\sqrt[3]{x-1}$

(3) $y=\sqrt[4]{x^2+1}$ (4) $y=\dfrac{x}{(1-x)^2}$

3. y가 x의 함수이고 등식 $x^2-xy-y^2=3$을 만족시킨다. 이때 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하시오.

4. 매개변수 t로 나타낸 함수 $x=3t-1$, $y=9t^2-3t$에 대하여 $t=1$일 때 이 함수의 그래프에 접하는 직선의 방정식을 구하시오.

5. 미분계수의 정의와 도함수를 사용하여 다음 극한을 구하시오.

(1) $\lim_{h \to 0} \frac{(h+2)^2 - 4}{h}$

(2) $\lim_{h \to 0} \frac{(h-1)^3 + 1}{h}$

(3) $\lim_{p \to 0} \frac{\sqrt{p+2} - \sqrt{2}}{p}$

(4) $\lim_{s \to 0} \frac{\sqrt{s+4} - 2}{s}$

(5) $\lim_{h \to 0} \frac{(8+h)^{1/3} - 2}{h}$

(6) $\lim_{k \to 0} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k+1} - 1\right)$

개념을 다지기 위한 문제

6. 함수 $y = \frac{x}{1-x}$의 그래프에 접하는 직선 중 기울기가 4인 직선의 방정식을 구하시오.

7. 함수 $y = \frac{1}{x}$의 그래프에 접하고 점 $(2,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

8. y가 x의 함수이고 등식 $x = \frac{2y}{y^2 - 2}$와 부등식 $-1 < y < 1$을 만족시킨다. 이때 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=0}$을 구하시오.

9. p가 0이 아닌 실수라고 하자. 이때 포물선 $y^2 = 4px$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서 이 포물선에 접하는 직선의 방정식을 구하시오.

10. a, b가 양수라고 하자. 타원
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서 이 타원에 접하는 직선의 방정식을 구하시오.

11. a, b가 양수라고 하자. 쌍곡선
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서 이 곡선에 접하는 직선의 방정식을 구하시오.

12. 매개변수 t로 나타낸 함수 $x = 2t^2 - 5$, $y = t^3 + t$에 대하여 이 함수의 그래프에 접하는 직선 중 직선 $x + y + 3 = 0$과 수직으로 만나는 직선의 방정식을 구하시오.

실력을 향상시키기 위한 문제

13. y가 x의 함수이고 등식 $x^2 + y^2 = 5^2$을 만족시킨다. 이때 y''를 구하시오.

14. y가 x의 함수이고 등식 $x^3 - y^3 = 1$을 만족시킨다. 이때 y''을 구하시오.

15. y가 x의 함수이고 등식 $xy + y^2 = 1$을 만족시킨다. 이때 y'과 y''을 구하시오.

16. y가 x의 함수이고 다음 등식을 만족시킬 때 y''을 구하시오.

(1) $x^2 - y^2 = 1$

(2) $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1$

17. 함수 f가 미분 가능한 함수이고 f의 역함수 g가 존재하며 g도 미분 가능하고

$$\lim_{x \to 9} \frac{f(x)-3}{x-9} = \frac{1}{2}$$

을 만족시킨다. 이때 $g(3)+g'(3)$을 구하시오.

18. 매개변수 t로 나타낸 함수 $x=t^3+t$, $y=t^7+t+1$에서 $\dfrac{dy}{dx}$와 $\dfrac{d^2y}{(dx)^2}$를 구하시오.

19. 함수 f가 실수 전체 구간에서 미분 가능하고, 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)+f(4-x)=8$을 만족시키며 $f(0)=10$이고 $f'(0)=-3$이다. 또한 f의 역함수 g가 존재한다. 이때 $g'(-2)$를 구하시오.

20. n이 2 이상인 자연수이고 함수 f와 g가 n번 이상 미분 가능한 함수라고 하자. 이때 f와 g의 곱 fg의 n계도함수가 다음과 같음을 보이시오.

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

이 공식을 **라이프니츠의 공식**(Leibniz rule)이라고 부른다. [여기서 $\binom{n}{k}$는 이항계수를 나타낸다.]

더 깊이 공부하고 싶은 사람을 위한 문제

21. 일차근사함수를 사용하여 연쇄법칙을 증명하는 방법을 조사해 보자.

22. 연쇄법칙을 다음과 같이 증명하면 무엇이 문제인가?

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}.\end{aligned}$$

23. 이 책에서는 역함수 정리를 증명할 때 그래프를 사용한 직관적인 설명을 하였다. 함수의 극한을 사용한 방법으로 역함수 정리를 증명해 보자.

24. r가 유리수이고 $r>0$, $r \neq 1$일 때 함수 $y=x^r$의 도함수를 다음과 같이 구하면 무엇이 문제인가?

> r가 양수인 유리수이므로 $r=\dfrac{n}{m}$인 자연수 n과 m이 존재한다.
>
> 등식 $y=x^r$의 양변을 m제곱하면
>
> $$y^m = x^n$$
>
> 이므로, 음함수 미분법을 사용하여 양변을 x에 대하여 미분하면 다음을 얻는다.
>
> $$my^{m-1} \times \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}.$$
>
> 그러므로 y의 도함수는 다음과 같다.
>
> $$\frac{dy}{dx} = \frac{nx^{n-1}}{my^{m-1}} = \frac{nx^{n-1}}{m\left(x^{n/m}\right)^{m-1}} = \frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1} = rx^{r-1}.$$

You don't have to be perfect to be confident.

You are not meant to be perfect; perfect people simply don't exist and those people who try to be perfect are the unhappiest people in the world. They have entered a race to be perfect that has no ending, and as they get close to the finishing line it continually moves further away from them.

완벽해지려 하지 않아도 된다. 세상에 완벽한 사람은 없다. 세상에서 가장 불행한 사람은 완벽해지려 애쓰는 사람이다. 완벽을 겨루는 경기에는 끝이 없기 때문이다. 결승점을 향해 전진할수록 그 결승점은 점점 더 멀어질 뿐이다.

— Marisa Peer

여덟 번째 이야기
다양한 함수의 도함수

y가 x에 관한 함수이고, x에 대한 다항식 a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, $\cdots$, a_0이 존재하여

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + a_{n-2}(x)y^{n-2} + \cdots + a_0(x) = 0$$

을 만족시킬 때, y를 x에 대한 **대수적 함수**(algebraic function)라고 부른다. 또한 대수적 함수가 아닌 함수를 **초월함수**(transcendental function)라고 부른다. 지수함수, 로그함수, 삼각함수는 수학에서 가장 자주 사용하는 초월함수이다.

이 단원에서는 지수함수, 로그함수, 삼각함수의 도함수를 살펴보자.

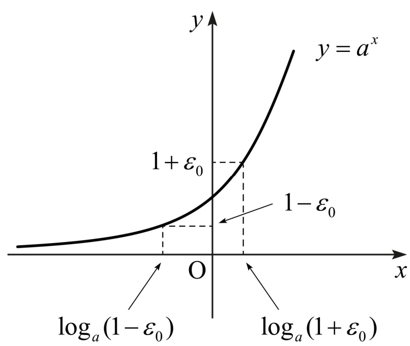
1 지수함수와 로그함수

$a > 0$, $a \neq 1$일 때 $y = a^x$ 꼴의 함수를 **밑이 a인 지수함수**라고 부른다.

지수함수 $y = a^x$은 정의역이 $\mathbb{R}$이고 치역이 $(0, \infty)$인 일대일함수이다. 특히 $a > 1$일 때 이 함수는 순증가하는 함수이며, $0 < a < 1$일 때 이 함수는 순감소하는 함수이다. 이와 같은 함수 $y = a^x$의 역함수를 $\log_a x$와 같이 나타내며 **밑이 a인 로그함수**라고 부른다.[35]

지수함수와 로그함수의 미분법을 살펴보기 전에 이들 함수가 연속임을 밝혀 보자.

보기 1. $a > 1$일 때 $f(x) = a^x$이라고 정의된 함수 f가 0에서 연속임을 증명해 보자.
미적분학을 처음 공부하는 사람이라면 이 증명을 넘겨도 좋다.



양수 ϵ이 임의로 주어졌다고 하자.
그리고 $\epsilon_0 = \min\{\epsilon, 1\}$이라고 하자.[36]

$$\delta = \min\{\log_a(1+\epsilon_0), -\log_a(1-\epsilon_0)\}$$

이라고 하면 δ는 양수이다.

이제 $|x - 0| < \delta$라고 하자. 그러면

$$\log_a(1-\epsilon_0) < x < \log_a(1+\epsilon_0)$$

인데, 밑이 a인 지수함수와 로그함수는 모두 순증가하는 함수이므로

$$1 - \epsilon \leq 1 - \epsilon_0 < a^x < 1 + \epsilon_0 \leq 1 + \epsilon$$

즉

$$|a^x - 1| < \epsilon$$

이다. 이 식은 $|f(x) - f(0)| < \epsilon$과 같다. 그러므로 f는 0에서 연속이다.

---

35) 이 책에서 별다른 언급 없이 $y = a^x$를 지수함수라고 부를 때는 $a > 0$, $a \neq 1$인 것으로 약속한다. 마찬가지로 별다른 언급 없이 로그함수 $y = \log_a x$를 다룰 때는 $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$인 것으로 약속한다.

36) ϵ을 바로 사용하지 않고 ϵ_0을 이와 같이 정의하는 이유가 무엇일까?

보기 1의 결과를 사용하면 지수함수가 모든 점에서 연속임을 보일 수 있다.

즉 $a>1$이고 $f(x)=a^x$일 때

$$\lim_{h\to 0} f(x+h)=\lim_{h\to 0} a^{x+h}=\lim_{h\to 0}\left(a^x a^h\right)=a^x\times\lim_{h\to 0} a^h=a^x\times 1=a^x=f(x)$$

이므로 함수 f는 임의의 실수 x에서 연속이다.

또한 $0<a<1$이고 $g(x)=a^x$일 때, $\dfrac{1}{a}>1$이고 $\left(\dfrac{1}{a}\right)^x>0$이며

$$g(x)=a^x=\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$$

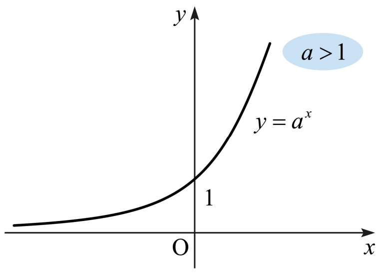
이므로 함수 g는 연속함수의 합성이다. 그러므로 함수 g는 임의의 실수 x에서 연속이다.

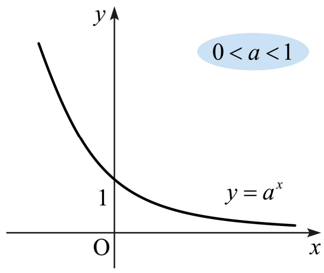
지수함수가 연속함수이고 로그함수는 지수함수의 역함수이므로 로그함수 또한 정의역의 모든 점에서 연속인 함수이다.

정리 1. $a>0$, $a\neq 1$일 때 지수함수 $y=a^x$와 로그함수 $y=\log_a x$는 연속함수이다.

한편 $0<r<1$일 때 수열 $\{r^n\}$이 0에 수렴하고 $r>1$일 때 수열 $\{r^n\}$이 양의 무한대로 발산한다는 사실과 지수함수가 단조함수라는 사실을 결합하면 다음과 같은 극한을 얻는다.

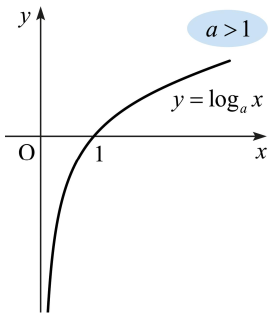
- $a>1$일 때 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} a^x=\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} a^x=0$,
- $0<a<1$일 때 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} a^x=0$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} a^x=\infty$.

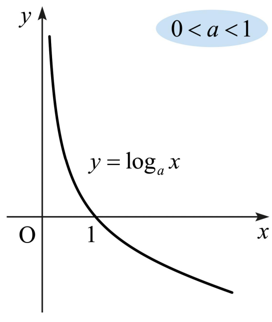




또한 로그함수가 지수함수의 역함수라는 사실을 사용하면 다음을 얻는다.

- $a>1$일 때 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_a x=\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\log_a x=-\infty$,
- $0<a<1$일 때 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_a x=-\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\log_a x=\infty$.





보기 2. 다음 극한을 구해 보자.

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{3^x}{3^x-2^x}$ (2) $\lim_{x\to 0+}\frac{5^x}{5^x-1}$

(1) 분자와 분모를 각각 3^x으로 나누면 다음을 얻는다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x}{3^x-2^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^x}=\frac{1}{1-0}=1.$$

(2) $\lim_{x\to 0+}5^x=1$, $\lim_{x\to 0+}(5^x-1)=0$이고, $x>0$일 때 $5^x-1>0$이므로 다음을 얻는다.

$$\lim_{x\to 0+}\frac{5^x}{5^x-1}=\infty.$$

보기 3. 다음 극한을 구해 보자.

(1) $\lim_{x\to\infty}\{\log_2(4x-1)-\log_2 x\}$ (2) $\lim_{x\to 1+}\frac{\log_2(x+1)}{\log_3 x}$

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x-1}{x}=4$이므로 $\lim_{x\to\infty}\{\log_2(4x-1)-\log_2 x\}=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4x-1}{x}=\log_2 4=2.$

(2) $\lim_{x\to 1+}\log_2(x+1)=\log_2 2=1$, $\lim_{x\to 1+}\log_3 x=0$이고 $x>1$일 때 $\log_3 x>0$이므로

$$\lim_{x\to 1+}\frac{\log_2(x+1)}{\log_3 x}=\infty.$$

지수함수 $f(x)=a^x$의 도함수를 구해 보자. 다음 식을 살펴보자.

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{a^x a^h-a^x}{h}=a^x\times\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=a^x f'(0) \end{aligned}$$

즉 0에서 f의 미분계수 $f'(0)$만 구하면 임의의 점 x에서 f의 미분계수 $f'(x)$를 구할 수 있다. 그렇다면 $f'(0)$을 어떻게 구할까?

지수함수 $f(x)=a^x$의 그래프 위의 점 $(0, 1)$에서 이 그래프에 접하는 접선의 기울기는 a의 값에 따라 달라진다. 이때 이 접선의 기울기가 1이 되도록 하는 밑 a의 값이 딱 하나 존재하는데 그 값을 e로 나타내고 **자연상수**[또는 '자연로그의 밑']라고 부른다. 그러나 이와 같은 방법으로 자연상수를 정의하면 그 값이 실제로 존재하는지, 그리고 그 값이 얼마인지가 명확하지 않다. 그래서 여기서는 자연상수를 다른 방법으로 정의하겠다.

수열 $\{e_n\}$을

$$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

이라고 정의하자. 그러면 수열 $\{e_n\}$은 순증가하고 위로 유계이다[3단원 연습문제 29]. 그러므로 단조수렴정리에 의하여 이 수열은 수렴하는데, 그 극한값을 **자연상수**라고 부르고 e로 나타낸다.

한편 x가 1 이상인 실수이고 $[x]$가 최대정수함수일 때 $[x] \le x \le [x]+1$이므로

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \le \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

이다. 여기서 $n=[x]$라고 두면 다음을 얻는다.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e\times 1 = e,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\times 1 = e.$$

따라서 함수의 극한의 조임정리에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

이다. 이 극한은 다른 형태로 나타낼 수 있다.

$t=\dfrac{1}{x}$이고 $x \to 0+$일 때 $t \to \infty$이므로

$$\lim_{x\to 0+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} = e$$

이다. 또한 $s=-\dfrac{1}{x}$이고 $x \to 0-$일 때 $x \to \infty$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0-}(1+x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{s\to\infty}\left(1-\frac{1}{s}\right)^{-s} = \lim_{s\to\infty}\left(\frac{s}{s-1}\right)^{s} \\ &= \lim_{s\to\infty}\left(1+\frac{1}{s-1}\right)^{s} = \lim_{s\to\infty}\left(1+\frac{1}{s-1}\right)^{s-1}\left(1+\frac{1}{s-1}\right) \\ &= e\times 1 = e\end{aligned}$$

이다. 이상을 정리하면 다음과 같다.

자연상수 e의 정의

$$e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

자연상수 e는 무리수이고 그 값이

$$e = 2.71828182845904523 52\cdots$$

임이 알려져 있다.

밑이 e인 로그 $\log_e x$를 **자연로그**라고 부르며 $\ln x$와 같이 나타낸다.[37] 또한 밑이 e인 지수함수 $y=e^x$을 **자연지수함수**[또는 그냥 '지수함수']라고 부르고 $\exp(x)$와 같이 나타낸다. 지수함수 $y=e^x$과 로그함수 $y=\ln x$는 자연현상을 기술하는 데 자주 사용된다.

37) 책에 따라서는 자연로그를 $\log x$와 같이 나타내기도 한다.

보기 4. 다음 극한을 구해 보자.

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ (2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1.$

(2) $t=e^x-1$로 두면 $e^x=1+t$이므로 $x=\ln(1+t)$이다. 또한 $x\to 0$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}}=\frac{1}{\lim_{t\to 0}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{\ln e}=1.$$

보기 5. $a>0$, $a\neq 1$일 때 다음 극한을 구해 보자.

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$ (2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\times\dfrac{1}{\ln a}\right)=1\times\dfrac{1}{\ln a}=\dfrac{1}{\ln a}.$

(2) $t=a^x-1$로 두면 $a^x=1+t$이다. 또한 $x\to 0$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\log_a(1+t)}{t}}=\frac{1}{\frac{1}{\ln a}}=\ln a.$$

이제 지수함수의 도함수를 구할 준비가 되었다. $a>0$, $a\neq 1$, $f(x)=a^x$이라고 하자. 보기 5의 (2)를 사용하면 다음을 얻는다.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^xa^h-a^x}{h}=a^x\times\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=a^x\ln a.$$

특히 밑이 e인 지수함수 $g(x)=e^x$의 도함수는 다음과 같다.

$$g'(x)=e^x\ln e=e^x.$$

한편 $x>0$일 때, $h(x)=\ln x$라고 두고 역함수의 미분법을 사용하면 다음을 얻는다.

$$h'(x)=\frac{1}{g'(\ln x)}=\frac{1}{e^{\ln x}}=\frac{1}{x}.$$

끝으로 $a>0$, $a\neq 1$일 때 밑이 a인 로그함수 $y=\log_a x$의 도함수는 다음과 같다.

$$y'=\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)=\frac{1}{\ln a}\times\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln a}.$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

정리 2. $a>0$, $a\neq 1$일 때 다음이 성립한다.

(1) $y=e^x$일 때 $y'=e^x$. (2) $y=a^x$일 때 $y'=a^x\ln a$.

(3) $y=\ln x$일 때 $y'=\dfrac{1}{x}$. (4) $y=\log_a x$일 때 $y'=\dfrac{1}{x\ln a}$.

밑 변환 공식을 사용하면 모든 로그함수를 자연로그함수로 나타낼 수 있다.

즉 $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$일 때 다음이 성립한다.

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

마찬가지로 모든 지수함수를 밑이 e인 지수함수로 바꿀 수 있다. 즉 $y = a^x$일 때

$$\ln y = \ln a^x = x\ln a = x\ln a \times 1 = x\ln a \times \ln e = \ln e^{x\ln a}$$

이다. 그런데 로그함수가 일대일함수이므로 위 식으로부터 $y = e^{x\ln a}$을 얻는다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

정리 3. $a > 0$, $a \neq 1$이고 x가 실수일 때 다음이 성립한다.

$$a^x = e^{x\ln a}$$

보기 6. α가 무리수이고, $x > 0$일 때 $f(x) = x^\alpha$라고 하자. 이때 f의 도함수를 구해 보자.

주어진 함수의 식을 변형하면

$$f(x) = x^\alpha = e^{\alpha\ln x}$$

이므로 연쇄법칙에 의하여 다음을 얻는다.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{\alpha\ln x}\right) = e^{\alpha\ln x} \times \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \times \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

즉 $f(x) = x^\alpha$의 도함수가 $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$이므로, α가 정수일 때의 공식과 일치한다.

보기 7. 다음 함수의 도함수를 구해 보자.

(1) $f(x) = x^e \quad (x \geq 0)$ (2) $g(x) = x^{\sqrt{0.5}} \quad (x \geq 0)$

(1) $x > 0$일 때 **보기 6**의 결과에 의하여 $f'(x) = ex^{e-1}$이다.
한편 0에서 f의 미분계수를 구하면

$$f'(0) = \lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+}\frac{h^e}{h} = \lim_{h\to 0+} h^{e-1} = 0$$

이다. 이것은 식 ex^{e-1}에 $x = 0$을 대입한 것과 같다. 그러므로 f의 도함수는 다음과 같다.

$$f'(x) = ex^{e-1} \quad (x \geq 0)$$

(2) $x > 0$일 때 **보기 6**의 결과에 의하여

$$g'(x) = \sqrt{0.5}\,x^{\sqrt{0.5}-1}$$

이다. 한편 0에서 g의 미분계수를 구하려고 시도해 보면

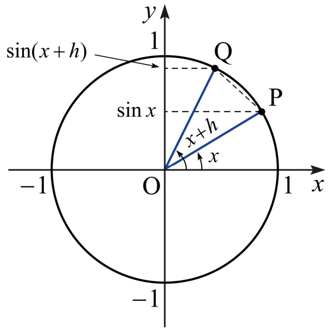
$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0+}\frac{h^{\sqrt{0.5}}}{h} = \lim_{h\to 0+}\frac{1}{h^{1-\sqrt{0.5}}} = \infty$$

이므로, g는 0에서 미분 불가능하다. 그러므로 g의 도함수는 다음과 같다.

$$g'(x) = \sqrt{0.5}\,x^{\sqrt{0.5}-1} \quad (x > 0).$$

2 삼각함수

삼각함수가 연속함수임을 밝혀 보자.



각 x와 h의 단위가 라디안이고 $h \neq 0$일 때 그림과 같이 좌표평면 위에서 두 각 x, $x+h$를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 각각 P, Q라고 하면

$$\mathrm{P}(\cos x,\ \sin x),\quad \mathrm{Q}(\cos(x+h),\ \sin(x+h))$$

이고 $\angle \mathrm{POQ} = h$이다. 이때 호 PQ의 길이는 $|h|$와 같고, 이 값은 두 점 P, Q의 y좌표의 차보다 크다. P와 Q의 y좌표의 차는 $\sin x$와 $\sin(x+h)$의 차와 같으므로 다음 부등식을 얻는다.

$$|\sin(x+h) - \sin x| \leq |h|$$

이 부등식을 변형하면

$$-|h| \leq \sin(x+h) - \sin x \leq |h|$$

즉

$$\sin x - |h| \leq \sin(x+h) \leq \sin x + |h|$$

이다. 여기에 $h \to 0$인 극한을 취하면 조임정리에 의하여 다음을 얻는다.

$$\lim_{h \to 0} \sin(x+h) = \sin x$$

그러므로 사인은 임의의 점 x에서 연속이다. 한편

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),\quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

이므로, 코사인과 탄젠트는 각각의 정의역의 모든 점에서 연속인 함수이다.

정리 4. 사인, 코사인, 탄젠트는 각 함수의 정의역에서 연속이다.

이제 삼각함수 $f(x) = \sin x$의 도함수를 구해 보자. 다음 식을 살펴보자.38)

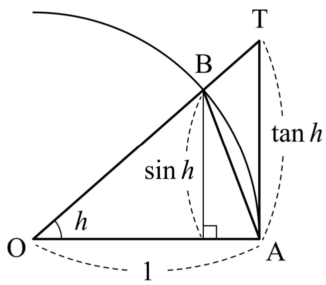
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left\{ \sin x \times \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \times \frac{\sin h}{h} \right\}. \end{aligned}$$

38) 극한을 계산하는 과정에서 삼각함수의 덧셈정리 $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$를 사용했다.

즉 사인의 도함수를 구하기 위해서는 다음 두 극한을 구해야 한다.

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h}, \quad \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}. \qquad \cdots ㉠$$

먼저 ㉠의 두 번째 극한을 구하자.



$h \to 0+$인 극한을 구하기 위하여 $0 < h < \frac{\pi}{2}$일 때를 생각하자.

그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 O에서 $\angle$AOB의 크기를 h라디안이라 하고, 점 A에서 원에 접하는 접선과 선분 OB의 연장선의 교점을 T라고 하면

(△AOB의 넓이)<(부채꼴 AOB의 넓이)<(△AOT의 넓이)

이므로

$$\frac{1}{2}\sin h < \frac{1}{2}h < \frac{1}{2}\tan h$$

즉 $\sin h < h < \tan h$이다. 이때 $\sin h > 0$이므로 부등식의 각 변을 $\sin h$로 나누면

$$1 < \frac{h}{\sin h} < \frac{1}{\cos h}$$

즉

$$\cos h < \frac{\sin h}{h} < 1$$

이다. 여기에 $h \to 0+$인 극한을 취하면 함수의 극한의 조임정리에 의하여 다음을 얻는다.

$$\lim_{h \to 0+} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

한편 $y = \frac{\sin h}{h}$는 그래프가 y축에 대하여 대칭인 함수이므로 0에서 이 함수의 좌극한과 우극한이 일치한다. 즉

$$\lim_{h \to 0-} \frac{\sin h}{h} = 1$$

이다. 이로써 다음 공식을 얻는다.

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

참고 위 공식은 h의 값이 0에 가까울 때

$$\sin h \fallingdotseq h$$

와 같이 $\sin h$의 근삿값으로 h를 사용할 수 있음을 의미한다. □

보기 8. 다음 극한을 구해 보자.

(1) $\lim_{h\to 0}\frac{\sin 3h}{4h}$ (2) $\lim_{x\to \pi}\frac{\sin 3x}{\pi - x}$

(1) $t=3h$로 두면 $h\to 0$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin 3h}{4h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin 3h}{3h}\times\frac{3}{4}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\times\frac{3}{4}=1\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}.$$

(2) $t=\pi-x$로 두면 $x\to\pi$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\pi-x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 3(\pi-t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(3\pi-3t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 3t}{3t}\times 3=1\times 3=3.$$

다음으로 ㉠의 첫 번째 극한을 구하자.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{(1-\cos h)(1+\cos h)}{h(1+\cos h)}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos^2 h}{h(1+\cos h)}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\sin^2 h}{h(1+\cos h)}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{1+\cos h}\\&=1\times 0=0.\end{aligned}$$

이로써 다음 공식을 얻는다.

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}=0$$

이제 사인의 도함수를 구할 준비가 되었다. 즉 $f(x)=\sin x$일 때

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\left\{\sin x\times\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\times\frac{\sin h}{h}\right\}=\sin x\times 0+\cos x\times 1=\cos x$$

이다. 또한

$$\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\quad \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

이므로, 코사인과 탄젠트의 도함수는 다음과 같다.

$$\frac{d}{dx}\cos x=\frac{d}{dx}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x,$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\tan x&=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\frac{\cos x\times\cos x-\sin x\times(-\sin x)}{\cos^2 x}\\&=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x.\end{aligned}$$

보기 9. 시컨트, 코시컨트, 코탄젠트의 도함수를 구해 보자.

$$\frac{d}{dx}\sec x = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{-(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{\cos x} = \tan x \sec x,$$

$$\frac{d}{dx}\csc x = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x} = -\csc x \cot x,$$

$$\frac{d}{dx}\cot x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{-\sin x \times \sin x - \cos x \times \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x.$$

이상을 정리하면 다음을 얻는다.

정리 5. 삼각함수의 도함수는 다음과 같다.

(1) $y = \sin x$일 때 $y' = \cos x$.

(2) $y = \cos x$일 때 $y' = -\sin x$.

(3) $y = \tan x$일 때 $y' = \sec^2 x$.

(4) $y = \sec x$일 때 $y' = \tan x \sec x$.

(5) $y = \csc x$일 때 $y' = -\csc x \cot x$.

(6) $y = \cot x$일 때 $y' = -\csc^2 x$.

보기 10. $f(x) = \sin x \cos x$일 때 f의 도함수를 구해 보자.

곱의 미분법을 사용하면 $f'(x)$는 다음과 같다.

$$f'(x) = \cos x \cos x + \sin x(-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

다른 방법으로 구해 보자.

$$f(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

이므로

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) \times 2 = \cos 2x$$

이다. 두 가지 방법으로 구한 결과가 다른 것처럼 보이지만

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

이므로 두 결과는 일치한다.

사인, 코사인, 탄젠트는 일대일함수가 아니다. 그러나 이 함수의 정의역과 공역을 적당히 제한하여 일대일대응이 되도록 할 수 있으며,[39] 각 함수의 역함수도 생각할 수 있다. 즉 사인, 코사인, 탄젠트의 역함수를 다음과 같이 정의한다.[40]

$$\begin{array}{llll} -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, & -1 \le y \le 1 & \text{일 때} & y = \sin x \iff x = \sin^{-1} y, \\ 0 \le x \le \pi, & -1 \le y \le 1 & \text{일 때} & y = \cos x \iff x = \cos^{-1} y, \\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, & y \in \mathbb{R} & \text{일 때} & y = \tan x \iff x = \tan^{-1} y. \end{array}$$

39) x와 y의 범위를 이와 같이 제한하였을 때, 각 함수가 일대일대응이 됨을 보여야 한다. 이것은 다음 단원에서 살펴보는 내용을 사용하여 증명할 수 있다.

40) $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$를 각각 $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$로 쓰기도 한다. 시컨트, 코시컨트, 코탄젠트의 역함수도 정의해 보기 바란다.

물론 각 함수의 정의역을 다른 구간으로 제한하여도 각 함수가 일대일함수가 되도록 할 수 있다. 하지만 이 책에서는 별다른 언급이 없는 한 정의역을 위와 같이 제한하여 만든 삼각함수의 역함수를 사용하기로 하자.

함수 $f : [-1,\ 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$가 $f(x) = \sin^{-1}x$일 때, 역함수 정리를 사용하면 다음을 얻는다.

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(\sin^{-1}x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\sin^{-1}x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

그런데 $-\frac{\pi}{2}$와 $\frac{\pi}{2}$에서 사인의 미분계수가 0이므로, $\sin^{-1}x$는 -1과 1에서 미분 불가능하다. 즉

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (|x| < 1)$$

이다.

코사인의 역함수와 탄젠트의 역함수의 도함수도 같은 방법으로 구할 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

정리 6. 역삼각함수의 도함수는 다음과 같다.

(1) $y = \sin^{-1}x$일 때 $\quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$

(2) $y = \cos^{-1}x$일 때 $\quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$

(3) $y = \tan^{-1}x$일 때 $\quad y' = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$

연습문제

개념에 익숙해지기 위한 문제

1. 다음 함수의 도함수를 구하시오.

(1) $f(x) = 4e^{2x}$

(2) $f(x) = 1 + 4x + e^{-2x}$

(3) $f(t) = (1+t)e^{t^2}$

(4) $f(t) = \frac{1}{e^{-t}}$

(5) $y = (e^x + e^{-x})^3$

(6) $f(x) = 2e^{\sqrt{x}}$

(7) $g(x) = (e^{-2x} - 2x)^3$

(8) $g(t) = e^{3/t}$

(9) $y = e^{x^2 - 5x + 4}$

(10) $f(t) = (e^{2t})^{-4}$

(11) $f(t) = \frac{e^{3t} + e^{-3t}}{e^t}$

(12) $f(x) = \sqrt{e^{x/2} + 1}$

(13) $f(x) = e^{4x}/(4+x)$

(14) $f(x) = e^{e^x}$

(15) $f(x) = \left(\frac{1}{x} + 3\right)e^{2x}$

(16) $f(x) = \frac{4x^2}{x^2 + e^{2x}}$

2. 다음 함수의 도함수를 구하시오.

(1) $y=\ln 2x$ (2) $y=\ln(x+3)+\ln 5$

(3) $y=\ln\left(6x^2-3x+1\right)$ (4) $y=e^{\ln x+x}$

(5) $y=(1+\ln x)^3$ (6) $y=(\ln x)^2+\ln\left(x^2\right)$

(7) $y=\dfrac{\ln x}{\ln 2x}$ (8) $y=\ln\dfrac{1}{x}$

(9) $y=\ln\dfrac{x-1}{x+1}$ (10) $y=\left\{\ln\left(e^{2x}+1\right)\right\}^2$

(11) $y=\ln\left(e^{5x}+1\right)$ (12) $y=\sqrt{\ln 2x}$

3. 다음 함수의 도함수를 구하시오.

(1) $y=4\sin t$ (2) $y=\cos(-4t)$

(3) $y=t+\cos\pi t$ (4) $y=t\cos t$

(5) $y=\cos^3 t$ (6) $y=\sin^3 t^2$

(7) $y=\sin\sqrt{x-1}$ (8) $y=e^{\cos x}$

(9) $y=\cos^2 x+\sin^2 x$ (10) $y=e^x\sin x$

(11) $y=(\cos x+\sin x)^2$ (12) $y=\sin 2x\cos 3x$

(13) $y=\ln(\cos t)$ (14) $y=\sin(\ln t)$

(15) $y=(\cos t)\ln t$ (16) $y=\ln(\sin 2t)$

개념을 다지기 위한 문제

4. 다음 수열의 극한을 구하시오.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{n}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+3}\right)^{2n}$ (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n!}\right)^{n!}$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$ (6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n-1}\right)^{n}$

5. 다음 함수의 극한을 구하시오.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6^x}{6^x+2^x}$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\log_2(2x+3)-\log_2(x+1)\right\}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{3}{x}}$ (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{x}$

(5) $\lim\limits_{x\to 2}(x-1)^{\frac{2}{x-2}}$ (6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{4x}$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{x}$ (8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\cos x-\cos^2 x}$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin x\cos x}$ (10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin x\tan x}$

6. $f(x)=(1-\cos x)\sin x$일 때 다음 극한을 구하시오.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+2h)-f(\pi-h)}{3h}$$

7. 다음 극한을 구하시오.

$$\lim_{x\to 0}\sin x\cos\frac{1}{x}$$

8. 매개변수 방정식 $x=2\tan t$, $y=3\sec t$에 의하여 정의된 곡선을 C라고 하자. 곡선 C 위의 점 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\ 2\sqrt{3}\right)$에서 이 곡선에 접하는 직선의 기울기를 구하시오.

9. 곡선 $y=x+\cos xy$ 위의 점 $(0,\ 1)$에서 이 곡선에 접하는 직선의 기울기를 구하시오.

10. y가 x의 함수이고 등식 $e^x+e^y=2$를 만족시킨다. 이때 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$을 구하시오.

11. a가 양수일 때, 매개변수 t로 나타낸 함수 $x=at-a\sin t$, $y=a-a\cos t$의 그래프 위의 점 $(0,\ 0)$에서 이 곡선에 접하는 직선의 기울기를 구하시오.

12. 매개변수 t로 나타낸 함수 $x=t^5+\sin 2\pi t$, $y=t+e^t$에 대하여 $t=1$일 때 $\frac{dy}{dx}$를 구하시오.

13. 매개변수 t로 나타낸 함수 $x=t^2+e^t$, $y=t+e^t$의 그래프 위의 점 $(1,\ 1)$에서 이 그래프에 접하는 직선의 방정식을 구하시오.

14. 매개변수 t로 나타낸 함수 $x=e^{-t}\cos 2t$, $y=e^{-2t}\sin 2t$에 대하여 $t=0$일 때 $\frac{dy}{dx}$를 구하시오.

15. 매개변수 t로 나타낸 함수 $x=3e^t$, $y=5e^{-t}$에 대하여 $t=0$일 때 이 함수의 그래프에 접하는 직선의 방정식을 구하시오.

16. a가 양수일 때, 매개변수 θ로 나타낸 함수 $x=a\cos^4\theta$, $y=a\sin^4\theta$에 대하여 $\theta=\frac{\pi}{4}$일 때 이 함수의 그래프에 접하는 직선의 방정식을 구하시오.

실력을 향상시키기 위한 문제

17. 다음이 성립하도록 하는 상수 a의 값을 구하시오.

$$\lim_{x\to\infty}\{\log ax-\log(2x+5)\}=1$$

18. 다음이 성립하도록 하는 상수 a와 b의 값을 구하시오.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{ax\sin x+b}=\frac{1}{4}$$

19. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$f(x)=\begin{cases}\sin x+a\cos x & \text{if } x\geq 0\\ be^{x-1} & \text{if } x<0\end{cases}$$

이때 f가 0에서 미분 가능하도록 하는 상수 a와 b의 값을 구하시오.

20. 다음 극한을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right\}^{2n}$$

21. y가 x의 함수이고 $x>0$, $y>0$이며 $x^y=y^x$을 만족시킨다. 이때 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하시오.

22. 함수 f가 두 번 미분 가능한 함수이고 다음을 만족시킨다.

$$e^{f(x)}=\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$$

이때 $f''\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$를 구하시오.

23. 함수 $y=(x-1)e^x$의 그래프에 접하고 점 $(k,\ 0)$을 지나는 직선의 개수가 2가 되도록 하는 상수 k의 값을 구하시오.

24. 함수 $f(x)=x\ln x$의 그래프와 함수 $g(x)=\ln x$의 그래프의 교점을 P라고 하자. 두 함수 f, g의 그래프 모두에 접하고 점 P를 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

25. a가 양수일 때, 매개변수 t로 나타낸 함수 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$에 대하여 $\dfrac{dy}{dx}$와 $\dfrac{d^2y}{(dx)^2}$을 구하시오.

26. 다음 극한이 수렴함을 보이고, 그 값을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n}$$

27. 다음 극한이 수렴함을 보이시오.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!\,e^n}$$

28. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{if } x\neq 0\\ 0 & \text{if } x=0.\end{cases}$$

(1) 함수 f가 $\mathbb{R}$에서 미분 가능함을 보이시오.
(2) 도함수 f'이 0에서 불연속임을 보이시오.

29. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{if } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{if } x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

이때 함수 f가 0에서만 미분 가능하고 다른 점에서는 미분 불가능함을 보이시오.

30. ‘로그 미분법’을 조사하고, 로그 미분법을 사용하여 다음 함수의 도함수를 구하시오.

(1) $y=x^x$

(2) $y=(\ln x)^x$

(3) $y=\dfrac{(x+1)(x+3)}{(x+2)(x+4)}$

(4) $y=\sqrt{\dfrac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}}$

더 깊이 공부하고 싶은 사람을 위한 문제

31. 쌍곡선함수(hyperbolic function)를 다음과 같이 정의한다.

- 쌍곡사인 $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
- 쌍곡코사인 $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
- 쌍곡탄젠트 $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$
- 쌍곡코시컨트 $\operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\sinh x}$
- 쌍곡시컨트 $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$
- 쌍곡코탄젠트 $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x}$

쌍곡선함수의 도함수를 구하시오.

32. 다음을 보이시오.

(1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(2) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

(3) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

(4) $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$

(5) $\cosh^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{\cosh x + 1}{2}$

(6) $\sinh^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{\cosh x - 1}{2}$

33. 다음을 보이시오.

(1) $\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

(2) $\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \qquad (x \geq 1)$

(3) $\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x} \qquad (|x| < 1)$

(4) $\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right) \qquad (x \neq 0)$

(5) $\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \qquad (0 < x \leq 1)$

(6) $\coth^{-1} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x+1}{x-1} \qquad (|x| > 1)$

"In mathematics you don't understand things. You just get used to them."

— John von Neumann

아홉 번째 이야기

함수의 그래프

함수 f가 구간에서 미분 가능할 때 구간의 점 c에서 미분계수 $f'(c)$는 $x=c$일 때 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선의 기울기와 같다. 이와 같이 미분은 함수의 그래프의 모양을 설명하기 위한 도구로 사용될 수 있다.

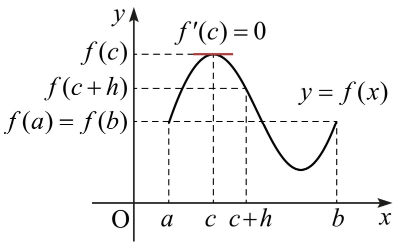
이 단원에서는 미분을 사용하여 함수의 그래프의 모양을 파악하는 방법을 살펴보자.

1 평균값 정리

닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분 가능하며 $f(a)=f(b)$를 만족시키는 함수 $y=f(x)$를 생각해 보자.

만약 f가 $[a, b]$에서 상수함수라면, 열린구간 (a, b)에 속하는 모든 c에 대하여 $f'(c)=0$이다.

만약 f가 $[a, b]$에서 상수함수가 아니라면, f가 최댓값 또는 최솟값을 갖는 어떤 점 c가 열린구간 (a, b)에 존재한다.



그림과 같이 함수 f가 c에서 최댓값 $f(c)$를 가진다고 해보자.

$a<c+h<b$인 임의의 h에 대하여 $f(c+h)-f(c) \leq 0$이므로

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0 \quad \text{그리고} \quad \lim_{h \to 0-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$$

이다. 그런데 f가 c에서 미분 가능하므로, 위 두 극한은 같아야 한다. 따라서 다음을 얻는다.

$$f'(c)=\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}=0$$

f가 c에서 최솟값을 갖는 경우에도 같은 결과를 얻을 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

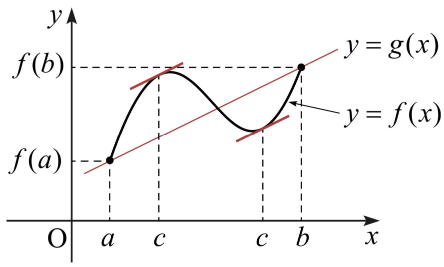
정리 1. 함수 f가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분 가능하며 $f(a)=f(b)$이면, $f'(c)=0$인 점 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.
이 정리를 **롤의 정리**(Rolle's theorem)라고 부른다.

정리 1을 $f(a) \neq f(b)$인 경우로 확장할 수 있다.

함수 f가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분 가능하다고 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 방정식을 $y=g(x)$라고 하면

$$g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

이다.



이때 함수 h를 $h(x)=f(x)-g(x)$라고 정의하면 h는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분 가능하며 $h(a)=h(b)=0$이다.

따라서 롤의 정리에 의하여

$$h'(c)=0$$

인 점 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다. 위 등식의 좌변은

$$h'(c)=f'(c)-g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

이고, 이 값이 0이므로

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

이다. 이상을 정리하면 다음과 같다.

정리 2. 함수 f가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분 가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 점 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다. 이 정리를 **평균값 정리**(mean value theorem)라고 부른다.

평균값 정리는 다음과 같이 표현할 수 있다.

함수 f가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분 가능하면, $[a, b]$에서 f의 평균변화율과 c에서 f의 순간변화율이 같아지는 점 c가 (a, b)에 존재한다.[41]

41) '평균값 정리'를 '평균변화율 정리'라고 부르는 편이 낫지 않을까?

평균값 정리를 사용하면 구간에서 함수의 증감과 도함수의 부호의 관계를 밝힐 수 있다.

함수 f가 열린구간 I에서 미분 가능하다고 하자. 그러면 구간 I에 속하고 $x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여,

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 (x_1, x_2)에 적어도 하나 존재한다.

이때 f'의 부호에 따라 세 가지 경우를 생각할 수 있다.

(1) 만약 구간 I의 모든 점 x에 대하여 $f'(x)>0$이라면

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)>0$$

이고 $x_2-x_1>0$이므로 $f(x_2)-f(x_1)>0$ 즉 $f(x_1)<f(x_2)$이다.

따라서 함수 f는 구간 I에서 순증가한다.

(2) 만약 구간 I의 모든 점 x에 대하여 $f'(x)<0$이라면

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)<0$$

이고 $x_2-x_1>0$이므로 $f(x_2)-f(x_1)<0$ 즉 $f(x_1)>f(x_2)$이다.

따라서 함수 f는 구간 I에서 순감소한다.

(3) 만약 구간 I의 모든 점 x에서 $f'(x)=0$이라면

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)=0$$

이므로 $f(x_2)-f(x_1)=0$ 즉 $f(x_1)=f(x_2)$이다.

따라서 함수 f는 구간 I의 모든 점에서 일정한 함숫값을 가진다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

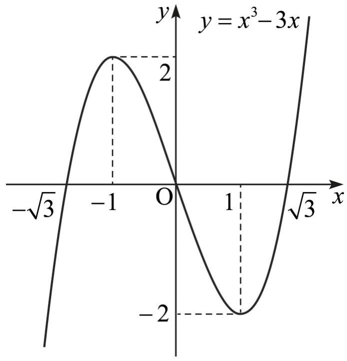
정리 3. 함수 f가 열린구간 I에서 미분 가능하다고 하자.
(1) 만약 I의 모든 점 x에서 $f'(x)>0$이면, f는 I에서 순증가한다.
(2) 만약 I의 모든 점 x에서 $f'(x)<0$이면, f는 I에서 순감소한다.
(3) 만약 I의 모든 점 x에서 $f'(x)=0$이면, f는 I에서 상수함수이다.

보기 1. 함수 $f(x)=x^2-6x+8$을 살펴보자. $f'(x)=2x-6$이므로 $x>3$일 때 $f'(x)>0$이고, $x<3$일 때 $f'(x)<0$이다. 그러므로 $x>3$일 때 f는 순증가하고, $x<3$일 때 f는 순감소한다.

참고 일반적으로 **정리 3**의 역이 항상 성립하는 것은 아니다. 즉 함수 f가 열린구간 I에서 순증가하더라도 $f'(x)=0$인 점이 존재할 수 있다. 예컨대 $f(x)=x^3$이면 함수 f는 실수 전체 구간에서 순증가하지만 $x=0$일 때 $f'(x)=0$이다. □

2 함수의 극값

함수 f가 $f(x)=x^3-3x$라고 정의되어 있을 때 $y=f(x)$의 그래프를 살펴보자. f는 $\mathbb{R}$에서 최솟값을 갖지 않고 최댓값도 갖지 않는다. 그러나 $x=-1$ 근처에서 $f(x)$가 마치 최댓값을 갖는 것처럼 보이며, $x=1$ 근처에서 $f(x)$가 최솟값을 갖는 것처럼 보인다.



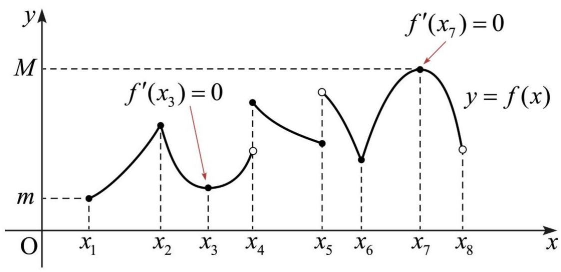
이렇게 그래프를 가까이서 보았을 때 최댓값이나 최솟값처럼 보이는 값을 각각 극댓값, 극솟값이라고 부른다. 극댓값과 극솟값의 정확한 정의는 다음과 같다.

함수 f가 구간 I에서 정의되어 있고 c가 I의 점이라고 하자.

- 만약 c를 원소로 갖는 어떤 열린구간 J가 존재하여 $f(c)$가 $J\cap I$에서 f의 최댓값이 되면 "f는 c에서 극댓값을 가진다."라고 말하고 $f(c)$를 f의 **극댓값**(local maximum value)이라고 부른다.
- 만약 c를 원소로 갖는 어떤 열린구간 J가 존재하여 $f(c)$가 $J\cap I$에서 f의 최솟값이 되면 "f는 c에서 극솟값을 가진다."라고 말하고 $f(c)$를 f의 **극솟값**(local minimum value)이라고 부른다.

극댓값과 극솟값을 통틀어 **극값**(local extreme value)이라고 부른다.[42)]

보기 2. 구간 $[x_1,\ x_8)$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다고 하자.



이 함수는 x_1, x_3, x_5, x_6에서 극솟값을 가지며 x_2, x_4, x_7에서 극댓값을 가진다.

이 함수는 x_1에서 최솟값 m을 가지며, x_7에서 최댓값 M을 가진다.

x_8에서는 극솟값을 갖지 않고 극댓값도 갖지 않는다.

함수 f가 $x=c$에서 극값을 갖고 c를 원소로 갖는 어떤 열린구간에서 미분 가능할 때 $f'(c)$의 값을 살펴보자. 함수 f가 c에서 극댓값을 가지면 0이 아니면서 0에 가까운 실수 h에 대하여

$$f(c+h)\le f(c)$$

이므로

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\le 0 \quad \text{그리고} \quad \lim_{h\to 0-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\ge 0$$

이다. 이때 함수 f는 c에서 미분 가능하므로 위 두 극한값은 같아야 한다. 즉 $f'(c)=0$이다.

같은 방법으로 f가 c에서 극솟값을 갖는 경우에도 $f'(c)=0$임을 알 수 있다.

42) 극댓값과 극솟값을 통틀어 **국소극값**이라고 부르기도 하며, 최댓값과 최솟값을 통틀어 **절대극값**이라고 부르기도 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

정리 4. 함수 f가 열린구간 I에서 미분 가능하다고 하자. 만약 $c \in I$이고 f가 c에서 극값을 가지면 $f'(c) = 0$이다.

함수 f의 정의역에 속하는 점 중에서 f의 미분계수가 0이거나 f가 미분 불가능한 점을 f의 **임계점**(critical point)이라고 부른다. **정리 4**에 의하면 닫힌구간에서 정의된 함수 f의 최댓값과 최솟값을 구하려면 구간의 끝점과 f의 임계점에서만 f의 함숫값을 조사하면 된다.

보기 3. 구간 $[-1, 2]$에서 $f(x) = x^2$이라고 정의된 함수 f의 최댓값과 최솟값을 구해 보자.

함수 f의 도함수는 $f'(x) = 2x$이므로 $f'(x) = 0$인 점은 $x = 0$ 뿐이다. 즉 f의 임계점은 0 뿐이다. 이제 구간의 끝점과 f의 임계점에서 f의 함숫값을 구하자.

$$f(-1) = 1, \quad f(0) = 0, \quad f(2) = 4.$$

이 중에서 가장 큰 값은 4이며, 가장 작은 값은 0이다.
그러므로 함수 f는 0에서 최솟값 0을 가지며, 2에서 최댓값 4를 가진다.

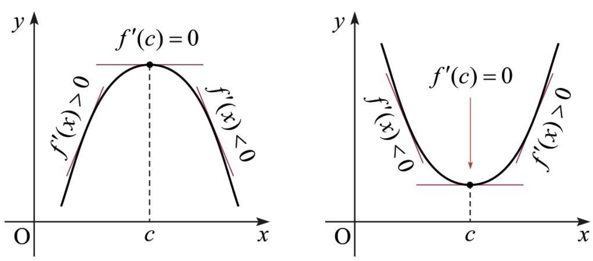
보기 4. 함수 $f(x) = x^3 + x$를 살펴보자. $f'(x) = 3x^2 + 1$이므로 모든 x에 대하여 $f'(x) > 0$이다. 그러므로 f는 어떤 점에서도 극값을 갖지 않는다.

보기 5. 함수 $g(x) = x^3$을 살펴보자. $g'(x) = 3x^2$이므로 $g'(x) = 0$인 점은 $x = 0$ 뿐이다. 그러나 $x_1 < x_2$일 때 $(x_1)^3 < (x_2)^3$이므로 g는 모든 곳에서 순증가하는 함수이다. 즉 g는 0에서 극값을 갖지 않는다. 이 예를 통해 **정리 4**의 역이 성립하지 않음을 확인할 수 있다.

함수가 미분 가능하면 극값을 갖는 점에서 미분계수가 0이다. 그러나 미분계수가 0이라고 해서 함수가 그 점에서 반드시 극값을 갖는 것은 아니다. 하지만 몇 가지 조건이 추가되면 미분계수가 0인 점에서 함수가 극값을 가진다.

함수 f가 열린구간 I에서 미분 가능하고 $c \in I$이며 $f'(c) = 0$이라고 하자.

- 만약 점 c의 좌우에서 f'의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 f는 c의 좌우에서 순증가하다가 순감소하므로 c에서 극댓값을 가진다.
- 만약 점 c의 좌우에서 f'의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 f는 c의 좌우에서 순감소하다가 순증가하므로 c에서 극솟값을 가진다.



따라서 미분 가능한 함수 f가 점 c에서 극값을 갖는지 여부는 f'의 부호의 변화를 조사하여 다음과 같이 판정할 수 있다.

정리 5. 함수 f가 열린구간 I에서 미분 가능하고 $c \in I$이며 $f'(c) = 0$이라고 하자.
(1) 만약 c의 좌우에서 f'의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 f는 c에서 극대이고, 극댓값 $f(c)$를 가진다.
(2) 만약 c의 좌우에서 f'의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 f는 c에서 극소이고, 극솟값 $f(c)$를 가진다.

보기 6. 함수 $g(x) = x^3 - 3x$의 극값을 구해 보자.

$$g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

이므로 $g'(x) = 0$인 점은 $x = -1$과 $x = 1$ 뿐이다.
$x < -1$일 때 $g'(x) > 0$이고 $-1 < x < 1$일 때 $g'(x) < 0$이므로 g는 $x = -1$에서 극댓값을 가진다.
$-1 < x < 1$일 때 $g'(x) < 0$이고 $x > 1$일 때 $g'(x) > 0$이므로 g는 $x = 1$에서 극솟값을 가진다.

보기 7. 구간 $[3, 6]$에서 정의된 함수 $f(x) = (x-4)^2$의 최댓값과 최솟값을 구해 보자.
$f'(x) = 2x - 8$이므로 $f'(x) = 0$인 점은 $x = 4$ 뿐이다.
$x < 4$일 때 $f'(x) < 0$이고, $x > 4$일 때 $f'(x) > 0$이므로 f는 $x = 4$에서 극솟값을 가진다.
이제 구간의 양 끝점인 3, 6과 f의 미분계수가 0인 점 4에서 f의 함숫값을 비교하자.

$$f(3) = (-1)^2 = 1, \quad f(6) = (6-4)^2 = 4, \quad f(4) = 0$$

이므로 f는 4에서 최솟값 0을 가지며, 6에서 최댓값 4를 가진다.

이계도함수를 사용하여 함수의 극대와 극소를 판정해 보자.

함수 f가 열린구간 I에서 연속인 이계도함수를 갖고 $c \in I$이며 $f'(c) = 0$이라고 하자.

- 만약 $f''(c) < 0$이면 이계도함수의 연속성에 의하여 0이 아니면서 0에 가까운 h에 대하여 열린구간 $(c-h, c+h)$에서 $f''(x) < 0$이 성립한다. 이때 열린구간 $(c-h, c+h)$에서 f'은 순감소하고 $f'(c) = 0$이므로 c의 좌우에서 f'의 부호가 양에서 음으로 바뀐다. 따라서 f는 c에서 극대이다.
- 같은 방법으로, 만약 $f''(c) > 0$이면 함수 f가 c에서 극소임을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

정리 6. 함수 f가 열린구간 I에서 연속인 이계도함수를 갖고 $c \in I$이며 $f'(c) = 0$이라고 하자.
(1) 만약 $f''(c) < 0$이면 f는 c에서 극대이고, 극댓값 $f(c)$를 가진다.
(2) 만약 $f''(c) > 0$이면 f는 c에서 극소이고, 극솟값 $f(c)$를 가진다.

보기 **8.** 함수 $h(x)=x^3-3x$를 살펴보자.

$$h'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

이므로 $h'(x)=0$인 점은 $x=-1$과 $x=1$ 뿐이다. 그런데

$$h''(x)=6x$$

이므로 $h''(-1)<0$이고 $h''(1)>0$이다.

그러므로 함수 h는 -1에서 극댓값 2를 가지며, 1에서 극솟값 -2를 가진다.

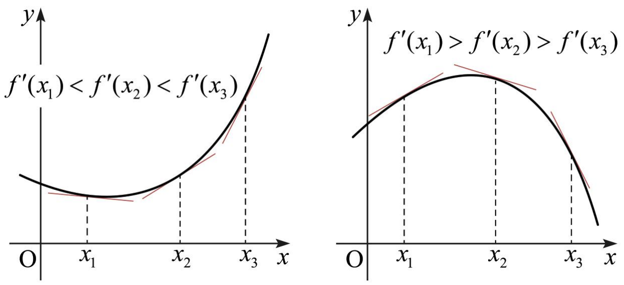
3 그래프의 오목과 볼록

어떤 구간에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 두 점 P, Q 사이의 곡선 부분이 선분 PQ보다 항상 아래쪽에 있으면 "곡선 $y=f(x)$가 이 구간에서 **아래쪽으로 볼록하다**(concave up; convex)."라고 말한다.

또 어떤 구간에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 두 점 P, Q 사이의 곡선 부분이 선분 PQ보다 항상 위쪽에 있으면 "곡선 $y=f(x)$가 이 구간에서 **위쪽으로 볼록하다**(concave down; concave)."라고 말한다.

함수 f가 구간 I에서 연속인 이계도함수를 가진다고 하자.

- 만약 f가 I에서 항상 $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기인 f'이 순증가하므로 이 구간에서 곡선 $y=f(x)$는 아래쪽으로 볼록하다.
- 만약 f가 I에서 항상 $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기인 f'이 순감소하므로 이 구간에서 곡선 $y=f(x)$는 위쪽으로 볼록하다.



$f''(x)>0$ $f''(x)<0$

이상을 정리하면 다음과 같다.

정리 **7.** 함수 f가 구간 I에서 연속인 이계도함수를 가진다고 하자.
(1) 만약 I의 모든 점에서 $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$는 구간 I에서 아래쪽으로 볼록하다.
(2) 만약 I의 모든 점에서 $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 구간 I에서 위쪽으로 볼록하다.

보기 **9.** 함수 $f(x)=x^2-6x+8$을 살펴보자. $f'(x)=2x-6$이고 $f''(x)=2$이므로 f의 그래프는 모든 곳에서 아래쪽으로 볼록하다.

함수 f가 구간 I에서 정의되어 있고 c가 I의 점이라고 하자. 만약 점 $(c,\ f(c))$에서 곡선 $y=f(x)$의 접선이 존재하고 c의 왼쪽과 오른쪽에서 f의 그래프가 볼록한 방향이 반대로 바뀌면 점 $(c,\ f(c))$를 곡선 $y=f(x)$의 **변곡점**(inflection point)이라고 부른다.

보기 **10.** 함수 $g(x)=x^3+x^2+x$의 그래프의 변곡점을 구해 보자.

$$g'(x)=3x^2+2x+1,\quad g''(x)=6x+2$$

이므로, $x<-\dfrac{1}{3}$일 때 g의 그래프는 위쪽으로 볼록하고, $x>-\dfrac{1}{3}$일 때 g의 그래프는 아래쪽으로 볼록하다. 그러므로 점 $\left(-\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{7}{27}\right)$은 g의 그래프의 변곡점이다.

4 그래프의 점근선

길이가 무한인 곡선에서 곡선 위의 점이 원점으로부터 멀어질 때, 그 점에서 어떤 직선과의 거리가 0으로 수렴하면 그 직선을 곡선의 **점근선**(asymptote)이라고 부른다. 함수의 그래프의 점근선은 크게 세 가지로 분류할 수 있다.

직선 $y=b$가 함수 $y=f(x)$의 그래프의 **수평점근선**(horizontal asymptote)이라 함은

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=b \quad \text{또는} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=b$$

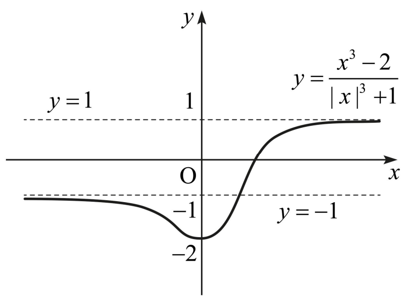
중 하나 이상이 성립하는 것을 의미한다.

보기 **11.** 함수의 그래프의 수평점근선을 구하는 예를 살펴보자.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$이라고 하면 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$이고 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$이므로, $y=f(x)$의 그래프의 수평점근선은 직선 $y=0$ 뿐이다.

(2) $f(x)=e^x$이라고 하면 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}e^x=\infty$이고 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}e^x=0$이므로, $y=f(x)$의 그래프의 수평점근선은 직선 $y=0$ 뿐이다.

(3) $f(x)=\dfrac{x^3-2}{|x|^3+1}$이라고 하자. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2}{|x|^3+1}=1$이고 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2}{|x|^3+1}=-1$이므로, $y=f(x)$의 그래프의 수평점근선은 두 개의 직선 $y=1$과 $y=-1$이다.



(4) $f(x)=\sin x$라고 하면 $x\to\infty$일 때와 $x\to-\infty$일 때 모두 f가 발산한다. 그러므로 $y=f(x)$의 그래프는 수평점근선을 갖지 않는다.

(5) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$라고 하면 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$이고 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$이므로, $y=f(x)$의 그래프의 수평점근선은 직선 $y=0$ 뿐이다.

여기서 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=0$과 무수히 많은 점에서 교차한다는 사실이 흥미롭다.

직선 $y=ax+b$가 함수 $y=f(x)$의 그래프의 **사선점근선**(oblique asymptotes)이라 함은 $a\neq 0$이고

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-ax-b\}=0 \quad \text{또는} \quad \lim_{x\to-\infty}\{f(x)-ax-b\}=0$$

중 하나 이상이 성립하는 것을 의미한다.

보기 12. 함수의 그래프의 사선점근선을 구하는 예를 살펴보자.

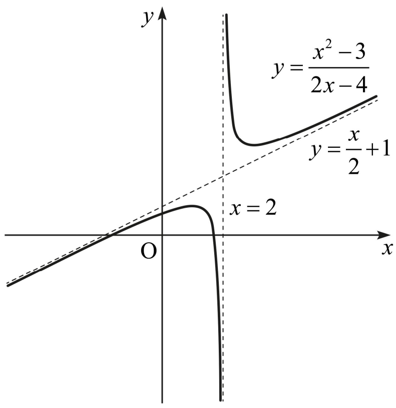
(1) $f(x)=\dfrac{x^2-3}{2x-4}$이라고 하자. 만약 $g(x)=\dfrac{x}{2}+1$이라고 하면

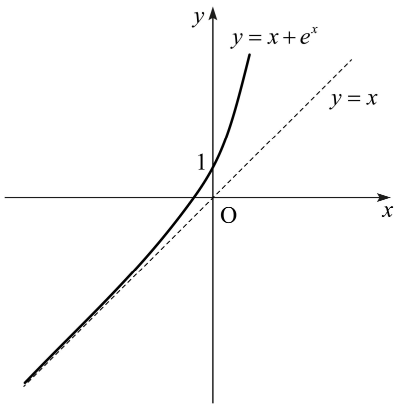
$$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{4-2x}=0$$

그리고

$$\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{4-2x}=0$$

이다. 그러므로 $y=f(x)$의 그래프의 사선점근선은 직선 $y=\dfrac{x}{2}+1$ 뿐이다.





(2) $f(x)=x+e^x$이라고 하자. 그러면 임의의 실수 a, b에 대하여

$$\lim_{x\to-\infty}\{(x+e^x)-(ax+b)\}=\infty$$

이고,

$$\lim_{x\to\infty}\{(x+e^x)-x\}=0$$

이다. 그러므로 $y=f(x)$의 그래프의 사선점근선은 직선 $y=x$ 뿐이다.

(3) $f(x)=\cos x$라고 하면 $y=f(x)$의 그래프는 사선점근선을 갖지 않는다.

직선 $x=c$가 함수 $y=f(x)$의 그래프의 **수직점근선**(vertical asymptote)이라 함은

$$\lim_{x\to c+}f(x)=\pm\infty \quad \text{또는} \quad \lim_{x\to c-}f(x)=\pm\infty$$

중 하나 이상이 성립하는 것을 의미한다.

보기 **13.** 함수의 그래프의 수직점근선을 구하는 예를 살펴보자.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$라고 하자. 그러면 f는 0을 제외한 모든 점에서 연속이다. 또한

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=\infty \quad \text{그리고} \quad \lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}=-\infty$$

이므로, $y=f(x)$의 그래프의 수직점근선은 직선 $x=0$ 뿐이다.

(2) $f(x)=\tan x$라고 하자. 그러면

$$x=n\pi+\frac{\pi}{2} \quad (n\text{은 정수})$$

꼴의 모든 직선은 $y=f(x)$의 그래프의 수직점근선이다. 즉 탄젠트의 그래프는 무한히 많은 수직점근선을 가진다.

(3) $f(x)=\ln x$라고 하자. 그러면 f의 정의역은 열린구간 $(0,\ \infty)$이다. f는 $(0,\ \infty)$에서 연속이고

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=-\infty$$

이므로, $y=f(x)$의 그래프의 수직점근선은 직선 $x=0$ 뿐이다.

(4) $f(x)=e^x$이라고 하면 함수 f는 모든 실수에서 연속이므로 $y=f(x)$의 그래프는 수직점근선을 갖지 않는다.

5 함수의 그래프의 개형

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같은 사항을 조사하여 그릴 수 있다.

① 함수의 정의역과 치역
② 곡선과 좌표축의 교점
③ 곡선의 대칭성과 주기
④ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소
⑤ 그래프가 볼록한 방향, 변곡점
⑥ 그래프의 점근선

보기 **14.** 함수 $f(x)=x^4+4x^3$의 그래프를 그려 보자. $f(x)$의 함수식을 인수분해하면

$$f(x)=x^3(x+4)$$

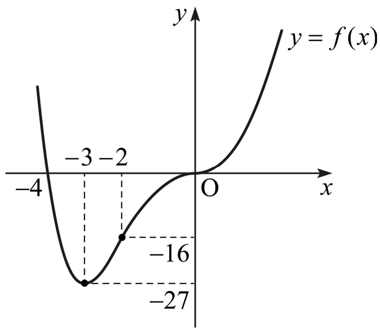
이다. f의 도함수를 구하면

$$f'(x)=4x^3+12x^2=4x^2(x+3),$$
$$f''(x)=12x^2+24x=12x(x+2)$$

이다. 여기서 $f(x)=0,\ f'(x)=0,\ f''(x)=0$인 점 x를 구하고 이 점을 기준으로 f의 증가와 감소를 표로 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$	-27	$\nearrow$	-16	$\nearrow$	0	$\nearrow$

이 표를 바탕으로 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



이 함수는 -3에서 최솟값 -27을 가지며 최댓값은 갖지 않는다. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x<-2$인 범위와 $x>0$인 범위에서 아래쪽으로 볼록하며, $-2<x<0$인 범위에서 위쪽으로 볼록하다. 또한 이 그래프의 변곡점은 $(-2,\ -16)$과 $(0,\ 0)$이다.

한편 함수 f가 모든 실수에서 연속이고, 임의의 실수 a, b에 대하여

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=\infty$$

이므로, $y=f(x)$의 그래프는 점근선을 갖지 않는다.

보기 **15.** 함수 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$의 그래프를 그려 보자.

f의 정의역이 실수 전체 집합이고 $f(0)=0$이므로, $y=f(x)$의 그래프는 원점을 지난다.

또한 $f(-x)=-f(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 그러므로 $x\geq 0$일 때의 그래프의 모양만 조사하면 충분하다.

$$f'(x)=-\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2},\quad f''(x)=\frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

이므로 $f'(x)=0$ 또는 $f''(x)=0$인 점 x를 구하고 이 점을 기준으로 f의 증가와 감소를 표로 만들면 다음과 같다.

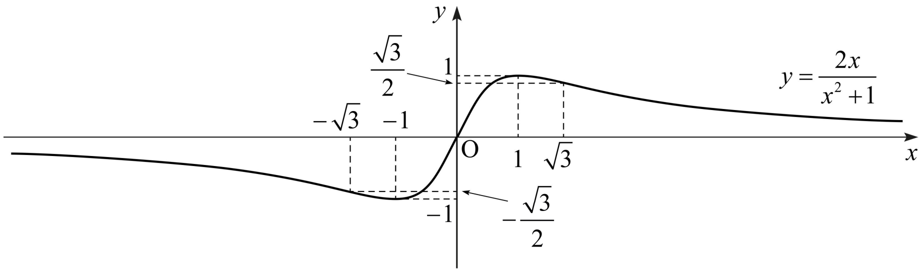
x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$

또한

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0$$

이므로 $y=f(x)$의 그래프의 점근선은 x축이다. f가 모든 실수에서 연속이므로 $y=f(x)$의 그래프는 수직점근선을 갖지 않는다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



이 함수는 1에서 최댓값 1을 갖고 -1에서 최솟값 -1을 가진다. 또한 $y=f(x)$의 그래프의 변곡점은 세 점 $\left(-\sqrt{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $(0,\ 0)$, $\left(\sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이다.

연습문제

개념에 익숙해지기 위한 문제

1. 함수 f가 실수 전체 구간에서 다음과 같이 정의되어 있을 때, 함수 f의 극값을 모두 구하시오.
   (1) $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+1$
   (2) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1$
   (3) $f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x+9$

2. 함수 f가 닫힌구간 $[-3,\ 1]$에서 다음과 같이 정의되어 있다.
$$f(x)=x^4-8x^2+5$$
   이때 f의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

3. 함수 f와 구간 I가 다음과 같을 때, 구간 I에서 함수 f의 최댓값과 최솟값을 구하시오.
   (1) $f(x)=-x^3+3x^2+2,\quad I=[-1,\ 4]$
   (2) $f(x)=\frac{1}{2}x^4+2x^3-x^2-6x+1,\quad I=[-2,\ 2]$
   (3) $f(x)=x^3-3x^2-9x+5,\quad I=[-2,\ 4]$
   (4) $f(x)=-3x^4+8x^3-6x^2-1,\quad I=[0,\ 2]$

4. 열린구간 $(0,\ \pi)$에서 함수 $y=x^2+4\cos x$의 그래프가 위쪽으로 볼록한 x의 범위를 구하시오.

5. 함수 f가 열린구간 $(0,\ 2\pi)$에서 $f(x)=e^x\sin x$라고 정의되어 있을 때, f의 그래프의 변곡점을 모두 구하시오.

6. 함수 f가 $f(x)=e^x-x$라고 정의되어 있을 때, 닫힌구간 $[-3,\ 1]$에서 f의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

7. 다음 함수의 그래프를 그리시오.

(1) $f(x)=\frac{1}{2}x^4-2x^3+2x^2-1$

(2) $f(x)=-3x^4-4x^3+1$

8. 다음 함수의 그래프의 사선점근선을 구하시오.

(1) $y=\frac{x^2}{x-1}$ (2) $y=\frac{x^2+1}{x-1}$

(3) $y=\frac{x^2-4}{x-1}$ (4) $y=\frac{x^2-1}{2x+4}$

(5) $y=\frac{x^2-1}{x}$ (6) $y=\frac{x^3+1}{x^2}$

극한을 계산하지 않고 분수함수의 사선점근선을 구하는 방법이 존재하는가?

개념을 다지기 위한 문제

9. 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $f(x)=2x^3-6x^2+a$의 최솟값이 -35일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

10. [0 이상인 모든 x에 대하여 $2x^3-3kx^2+1>0$]을 만족시키는 양수 k를 구하시오.

11. 함수 f가 $f(x)=-x^3+x^2+ax-4$라고 정의되어 있다. 이때 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 f가 순증가하도록 하는 상수 a의 값을 구하시오.

12. 함수 f가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$f(x)=x^3+6x^2+kx-1$$

이때 닫힌구간 $[-3,\ 1]$에서 함수 f가 순증가하도록 하는 상수 k의 값을 구하시오.

13. 함수 f가 $f(x)=x^3+3x^2+k-5$라고 정의되어 있고, 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 f의 최댓값이 8이다. 이때 구간 $[-2,\ 2]$에서 f의 최솟값을 구하시오.

14. [$x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $x^3-2x^2-4x\geq p$]가 성립하도록 하는 상수 p의 값을 구하시오.

15. 함수 f와 g가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$f(x)=x^4+x^2-6x \quad \text{그리고} \quad g(x)=-2x^2-16x+a.$$

구간 $[-2,\ 0]$의 모든 점 x에 대하여 $f(x)>g(x)$가 성립하도록 하는 상수 a의 값을 구하시오.

16. 함수 f가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$f(x)=4x^4-5x^3+10 \quad \text{그리고} \quad g(x)+x^4+3x^3+k.$$

이때 [모든 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$]가 성립하도록 하는 상수 k의 값을 구하시오.

17. 함수 f가 $f(x)=x^3-2x^2+ax+1$이라고 정의되어 있다. 이때 함수 f가 열린구간 $(-1,\ 2)$에서 극댓값과 극솟값을 모두 갖도록 하는 상수 a의 값을 구하시오.

18. x에 대한 방정식 $2x^3-6x+k=0$이 서로 다른 3개의 근을 갖도록 하는 상수 k의 값을 구하시오.

실력을 향상시키기 위한 문제

19. x에 대한 방정식 $5x^3-2=2x^3+9x+k$가 서로 다른 두 양의 근과 하나의 음의 근을 갖도록 하는 상수 k의 값을 구하시오.

20. x에 대한 방정식 $4x^3-3x-a=0$이 서로 다른 두 양의 근과 하나의 음의 근을 갖도록 하는 상수 a의 값을 구하시오.

21. 함수 f가 $f(x)=ax^3-6ax^2+b$라고 정의되어 있고 a와 b는 상수이며 $a>0$이다. 또한 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 f의 최댓값은 3이고 최솟값은 -29이다. 이때 $a+b$의 값을 구하시오.

22. 함수 f가 $f(x)=x^3+6ax^2+9a^2x+1$이라고 정의되어 있고, 이 함수의 최댓값과 최솟값의 합이 34이다. 이때 상수 a의 값을 구하시오.

23. 함수 f가 $f(x)=x^3-3x^2-9x+k$라고 정의되어 있고 k는 상수이다. 또한 함수 f가 극댓값 M과 극솟값 m을 가지며 $M=-m$이다. 이때 상수 k의 값을 구하시오.

24. 함수 f가 $f(x)=x^3+(a+1)x^2+ax+3$이라고 정의되어 있으며, 열린구간 $(-2, -1)$에서 극댓값을 갖고 열린구간 $(-1, \infty)$에서 극솟값을 가진다. 이때 상수 a의 값을 구하시오.

25. I가 길이가 양수인 열린구간이고 f가 I에서 정의된 함수라고 하자. 만약 I의 임의의 점 x에 대하여 $x \in J \subseteq I$인 열린구간 J가 존재하여 f가 J에서 상수함수이면, "f가 I에서 **국소적으로 상수**이다"라고 말한다. 함수 f가 구간 I에서 국소적으로 상수이면, f는 I에서 상수함수임을 보이시오.

더 깊이 공부하고 싶은 사람을 위한 문제

26. $n^m=m^n$을 만족시키는 서로 다른 자연수 m, n의 쌍을 모두 구하시오.

27. 함수 f가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x=0. \end{cases}$$

(1) f가 $\mathbb{R}$에서 연속임을 보이시오.
(2) f가 $\mathbb{R}$에서 미분 가능함을 보이시오.
(3) 임의의 자연수 n에 대하여 f의 n계도함수 $f^{(n)}$이 존재함을 보이시오.
(4) 임의의 자연수 n에 대하여 $f^{(n)}(0)=0$임을 보이시오.

28. 함수 f가 미분 가능할 때 f는 연속이지만 도함수 f'은 연속이 아닐 수 있다. 그러나 f가 미분 가능할 때 f'은 항상 사잇값 성질을 가진다. f가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분 가능하며 $f'(a) \neq f'(b)$라고 하자. 만약 y_0이 $f'(a)$와 $f'(b)$ 사이에 있는 점이라면 $f'(x_0)=y_0$을 만족시키는 점 x_0이 열린구간 (a, b)에 존재함을 보이시오. 이 정리를 **다르부의 정리**(Darboux's theorem) 또는 **도함수의 사잇값 성질**(intermediate value property)이라고 부른다.

29. 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 f의 예를 드시오.
(i) 함수 f는 열린구간 $(-1, 1)$에서 정의되어 있고, 이 구간에서 연속이다.
(ii) 함수 f는 0에서 미분 가능하고 $f'(0)>0$이다.
(iii) 열린구간 I가 $0 \in I \subset (-1, 1)$을 만족시키면, 함수 f는 I에서 단조증가함수가 아니다.

열 번째 이야기

도함수의 활용

앞 단원에서 미분을 사용하여 함수의 그래프의 모양을 파악하는 방법을 살펴보았다. 함수는 현실의 상황을 수학적으로 모델링하는 데 사용되며 함수의 그래프는 함수의 특성을 시각적으로 파악할 때 사용되므로, 미분은 함수와 관련된 다양한 문제 해결에 활용될 수 있다.

이 단원에서는 도함수를 활용하여 문제를 해결하는 예를 살펴보자.

1 방정식과 부등식

방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다. 따라서 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

보기 **1.** 방정식 $x-2=\ln x$의 서로 다른 실근의 개수를 구해 보자.

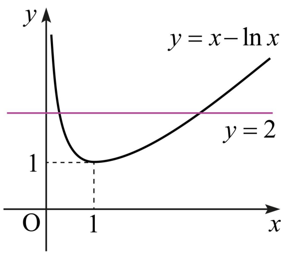
$f(x)=x-\ln x$라고 하면 문제의 방정식은 $f(x)=2$로 나타낼 수 있다.

$$f'(x)=1-\frac{1}{x}$$

이므로 $f'(x)=0$을 만족시키는 값은 $x=1$이다. 이제 함수 f의 증감을 표로 나타내자.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$\cdot$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cdot$	$\searrow$	1	$\nearrow$

$x \to 0+$일 때 $f(x) \to \infty$이고, $x \to \infty$일 때 $f(x) \to \infty$이므로, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=2$와 서로 다른 두 점에서 만난다.
그러므로 방정식 $x-2=\ln x$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

어떤 구간에서 부등식 $f(x) \geq g(x)$가 성립하는 것을 증명할 때는 $h(x)=f(x)-g(x)$로 두고, 그 구간에서 함수 h의 최솟값이 0보다 크거나 같음을 보이면 된다.43)

43) 함수 h의 최솟값이 존재하지 않을 때는 어떻게 할까?

보기 **2.** 모든 실수 x에 대하여 $e^x \geq x+1$이 성립함을 증명해 보자.

$f(x)=e^x-x-1$이라고 하면 문제의 부등식은 $f(x) \geq 0$과 같다.

$f'(x)=e^x-1$이므로 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=0$ 뿐이다.

함수 f의 증감을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

그러므로 함수 f는 $x=0$에서 최솟값을 가지며, $f(0)=0$이므로 f의 최솟값은 0이다. 즉 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 0$이므로 $e^x-x-1 \geq 0$ 즉 $e^x \geq x+1$이 성립한다.

2 속도와 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서 위치를 $x=f(t)$라고 할 때, 다음이 성립한다.

- 시각 t에서 점 P의 **속도** v는 $v=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$.
- 시각 t에서 점 P의 **가속도** a는 $a=\dfrac{dv}{dt}=f''(t)$.

보기 **3.** 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서 위치 x가

$$x=\sin t+\frac{1}{2}t$$

일 때, $t=\dfrac{\pi}{3}$에서 점 P의 속도와 가속도를 구해 보자.

시각 t에서 점 P의 속도 v와 가속도 a는 다음과 같다.

$$v=\frac{dx}{dt}=\cos t+\frac{1}{2},\quad a=\frac{dv}{dt}=-\sin t.$$

그러므로 $t=\dfrac{\pi}{3}$에서 점 P의 속도는

$$\left(\cos t+\frac{1}{2}\right)\bigg|_{t=\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

이고, 가속도는

$$(-\sin t)\Big|_{t=\frac{\pi}{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이다.

좌표평면 위를 움직이는 점 P에 대하여 시각 t에서 점 P의 위치를 $(x,\ y)$라고 하면, x, y는 각각 t의 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$와 같이 나타낼 수 있다. 이때 점 P의 속도의 x성분과 y성분은 각각

$$v_x=\frac{dx}{dt}=f'(t),\quad v_y=\frac{dy}{dt}=g'(t)$$

이고, 점 P의 가속도의 x성분과 y성분은 각각

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d^2x}{(dt)^2}=f''(t),\quad a_y=\frac{dv_y}{dt}=\frac{d^2y}{(dt)^2}=g''(t)$$

이다. 그러므로 점 P의 속도와 가속도는 각각

$$(f'(t),\ g'(t)),\quad (f''(t),\ g''(t))$$

이며, 점 P의 속력과 가속도의 크기는 각각

$$\sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2},\quad \sqrt{(f''(t))^2+(g''(t))^2}$$

이다.

보기 4. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가 $(x,\ y)$이고

$$x=t^3-2t^2,\quad y=t^2+2t$$

일 때, $t=1$에서 점 P의 속도, 속력, 가속도, 가속도의 크기를 구해 보자.

$$\frac{dx}{dt}=3t^2-4t,\quad \frac{dy}{dt}=2t+2,\quad \frac{d^2x}{(dt)^2}=6t-4,\quad \frac{d^2y}{(dt)^2}=2$$

이며, 이 식에 각각 $t=1$을 대입하면

$$\frac{dx}{dt}=-1,\quad \frac{dy}{dt}=4,\quad \frac{d^2x}{(dt)^2}=2,\quad \frac{d^2y}{(dt)^2}=2$$

이다. 따라서 구하는 속도와 가속도는

$$(-1,\ 2),\quad (4,\ 2)$$

이며, 속력과 속도의 크기는

$$\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5},\quad \sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}$$

이다.

3 일차근사함수

함수 f가 열린구간 I에서 미분 가능하고 $c\in I$일 때, 점 $(c,\ f(c))$에서 곡선 $y=f(x)$에 접하는 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y=f(c)+f'(c)(x-c)$$

따라서 이 접선은 다음과 같은 일차함수의 그래프이다.

$$L(x)=f(c)+f'(c)(x-c)$$

x의 값이 c에 가까울 때 일차함수 $L(x)$의 값은 함수 $f(x)$의 값의 근삿값으로 사용될 수 있다. 이와 같은 함수 L을 c에서 f의 **일차근사함수**(linearization)라고 부른다.

보기 5. $f(x)=\sqrt{1+x}$일 때 $c=0$에서 $f(x)$의 일차근사함수를 구해 보자.

$f(0)=1$이고

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$$

이므로 $f'(0)=1/2$이다. 따라서 구하는 일차근사함수는 다음과 같다.

$$L(x)=f(c)+f'(c)(x-c)=1+\frac{1}{2}(x-0)=1+\frac{1}{2}x.$$

k가 상수이고 x의 값이 0에 가까울 때, 다음과 같은 일차근사가 자주 사용된다.

$$(1+x)^k \fallingdotseq 1+kx$$

이 결과를 활용하면 x의 값이 0에 가까울 때, 다음과 같은 근사 공식을 얻는다.

$$\sqrt{1+x} \fallingdotseq 1+\frac{1}{2}x,$$
$$\frac{1}{1-x}=(1-x)^{-1} \fallingdotseq 1+(-1)(-x)=1+x,$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-1/2} \fallingdotseq 1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2)=1+\frac{1}{2}x^2.$$

보기 6. 아인슈타인의 이론에 의하면 운동하는 물체의 질량을 m이라고 하고, 이 물체의 정지상태의 질량을 m_0이라고 하며, 이 물체의 속력을 v라고 하고 빛의 속력을 c라고 할 때 다음이 성립한다.

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

여기서 v가 0에 가까우면 다음을 얻는다.

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \fallingdotseq m_0\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right\}=m_0+\frac{1}{2}m_0v^2\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

이 식을 변형하면

$$(m-m_0)c^2 \fallingdotseq \frac{1}{2}m_0v^2 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 정지상태에서 속력이 v인 상태가 될 때 물체의 질량의 변화량을 Δm이라고 하자. 뉴턴 물리학에서 물체의 운동에너지는

$$\Delta(\mathrm{KE})=\frac{1}{2}m_0v^2$$

이므로 ㉠을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(\Delta m)c^2 \fallingdotseq \Delta(\mathrm{KE})$$

따라서 속력이 0에서 v로 증가했을 때 운동에너지의 증가량 $\Delta(\mathrm{KE})$는 근사적으로 $(\Delta m)c^2$이 된다. 빛의 속력이 $c \fallingdotseq 3\times 10^8(\mathrm{m/s})$라는 점을 고려하면 물체의 속력이 조금만 증가해도 운동에너지의 증가량이 매우 크다는 것을 알 수 있다.

4 로피탈의 법칙

다음과 같은 함수 h를 생각하자.

$$h(x) = \frac{x - \sin x}{x^3}$$

이 함수는 0을 제외한 모든 점에서 정의된다. 이제 $x \to 0$일 때 h의 극한을 구하려고 한다. 위 등식의 우변의 분자와 분모를 각각 $f(x)$, $g(x)$라고 하면,

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

인데, $f(0) = 0$, $g(0) = 0$이므로 $x = 0$을 대입하는 방법으로는 $x \to 0$일 때 h의 극한을 구할 수가 없다.

이처럼 극한이 $0/0$꼴, ∞/∞꼴, $\infty \times 0$꼴, 0^0꼴, 1^∞꼴, ∞^0꼴일 때는 x에 값을 대입하는 방법으로는 극한값을 구할 수 없는데, 이러한 꼴의 극한을 **부정형**(indeterminate form)이라고 부른다.

부정형 극한의 극한값을 구할 때는 다음 법칙을 사용하면 유용하다.

정리 1. I가 열린구간이고 함수 f와 g가 I에서 미분 가능하며 $c \in I$라고 하자. 또한 $x \neq c$인 I의 점 x에서 $g'(x) \neq 0$이라고 하자. 만약 $x \to c$일 때 $f'(x)/g'(x)$의 극한이 수렴하면

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

가 성립한다. 이 공식을 **로피탈의 법칙**(L'Hôpital's rule)이라고 부른다.

참고 로피탈의 법칙에서 c를 실수가 아니라 양의 무한대나 음의 무한대로 바꾸어도 같은 결과를 얻으며, $x \to c$를 좌극한이나 우극한으로 바꾸어도 같은 결과를 얻는다. 또한 $f'(x)/g'(x)$가 양의 무한대로 발산하거나 음의 무한대로 발산하는 경우에도 같은 결과를 얻는다. □

보기 7. 다음 극한을 구해 보자.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

이 극한은 ∞/∞꼴인 부정형이다. 분자와 분모를 각각 미분한 뒤 극한을 구하면

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{1/(2\sqrt{x})} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$$

이다. 그러므로 로피탈의 법칙에 의하여

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$$

이다.

보기 8. 다음 극한을 구해 보자.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

이 극한은 $0/0$꼴인 부정형이다. 분자와 분모를 각각 미분하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

인데, 이 극한 또한 $0/0$꼴인 부정형이다. 다시 분자와 분모를 각각 미분하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

이고, 이 극한값은 1이다. 그러므로 로피탈의 법칙을 두 번 연달아 사용하면 다음을 얻는다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

$\infty\times 0$ 꼴의 극한이나 0^0 꼴의 극한은 로피탈 법칙을 곧바로 적용할 수 없으므로, 로피탈 법칙을 적용할 수 있는 꼴로 변형하여 계산한다.

보기 9. 다음 극한을 구해 보자.

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x$$

이 극한은 $\infty\times 0$꼴이므로 있는 그대로 로피탈 법칙을 적용할 수 없다. 문제의 극한을 변형하면

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/x}$$

이다. 이 극한은 ∞/∞꼴이다. 이 식의 분자와 분모를 각각 미분한 뒤 극한을 구하면

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/(x^2)}=\lim_{x\to 0+}(-x)=0$$

이다. 그러므로 로피탈 법칙에 의하여

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x=0$$

이다.

보기 10. 다음 극한을 구해 보자.

$$\lim_{x\to 0+} x^x$$

이 극한은 0^0꼴이므로 있는 그대로 로피탈 법칙을 적용할 수 없다.

$f(x)=x^x$, $\exp(x)=e^x$이라고 하면

$$\lim_{x\to 0+}\ln f(x)=\lim_{x\to 0+}x\ln x=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/x}$$

이며 보기 9의 결과에 의하여 이 극한값은 0이다. $\exp$가 0에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}\exp(\ln f(x))=\exp\left(\lim_{x\to 0+}f(x)\right)=e^0=1$$

이다.

이제 로피탈 법칙을 증명해 보자. 로피탈 법칙을 증명하기 위하여 다음 정리가 필요하다.

정리 2. 함수 f와 g가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분 가능하며, (a, b)의 모든 점에서 $g'(x) \neq 0$이라고 하자. 그러면 (a, b)에 속하는 적당한 수 c가 존재하여

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

를 만족시킨다. 이 정리를 **코시의 평균값 정리**(Cauchy's mean value theorem)라고 부른다.

증명 먼저 $g(a) \neq g(b)$임을 보이자. 만약 $g(a) = g(b)$라면 평균값 정리에 의하여 a와 b 사이에 적당한 수 c가 존재하여 다음을 만족시킨다.

$$g'(c) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a} = 0.$$

그런데 구간 (a, b)에서 $g'(x) \neq 0$이므로 이것은 불가능하다. 그러므로 $g(a) \neq g(b)$이다.

이제

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$$

라고 하자. 이 함수 F는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분 가능하며 $F(a) = F(b) = 0$이다. 그러므로 롤의 정리에 의하여 a와 b 사이에 적당한 수 c가 존재하여 다음을 만족시킨다.

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0.$$

이 식을 변형하면 다음을 얻는다.

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

■

이제 **정리 1**을 증명하자. $x \to c+$인 경우만 증명하면 된다. 왜냐하면 이 과정을 반복하여 $x \to c-$인 경우를 증명할 수 있고, 두 결과를 결합하면 $x \to c$인 경우의 증명이 되기 때문이다.

x가 c의 오른쪽에 있다고 가정하자. 그러면 $g'(x) \neq 0$이므로 닫힌구간 $[c, x]$에서 코시 평균값 정리를 사용할 수 있다. 즉 c와 x 사이에 적당한 점 k가 존재하여

$$\frac{f'(k)}{g'(k)} = \frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}$$

를 만족시킨다. 그런데 $f(c) = g(c) = 0$이므로 위 식은 다음과 같다.

$$\frac{f'(k)}{g'(k)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

k는 x의 값에 따라 달라지는 값이며 $c < k < x$이므로, $x \to c+$일 때 $k \to c+$이다. 그러므로 다음이 성립한다.

$$\lim_{x \to c+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{k \to c+} \frac{f'(k)}{g'(k)} = \lim_{x \to c+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

따라서 $x \to c+$인 경우 **정리 1**이 증명되었다. ■

이 절을 마치기 전에 로피탈 법칙을 사용할 때 주의할 점 세 가지를 소개하고자 한다.

주의할 점 1. 부정형이 아닌 극한을 계산할 때는 로피탈의 법칙을 사용하면 안 된다. 예컨대

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{1+3x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{3} = \frac{1}{3}$$

이라고 하면 안 된다. 왜냐하면 첫 극한이 부정형이 아니기 때문이다. 첫 극한은 0에 수렴한다. □

주의할 점 2. 로피탈 법칙을 사용할 때 등식

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

를 그냥 사용하면 안 된다. 이 등식은 우변의 극한이 진동하지 않을 때만 사용할 수 있다. 예컨대

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \cos x}{x}$$

는 ∞/∞꼴의 부정형이지만, 로피탈 법칙을 사용하여

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \cos x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \sin x}{1}$$

라고 쓰면 안 된다. 왜냐하면 우변이 진동하기 때문이다. □

주의할 점 3. 로피탈 법칙에서 $g'(x) \neq 0$이라는 조건은 필수이다. $g'(x) \neq 0$이라는 조건이 빠지면 어떠한 문제가 발생하는지 예를 통해 살펴보자.

$$f(x) = x + \sin x \cos x, \quad g(x) = f(x) e^{\sin x}$$

이라고 하자. 그러면

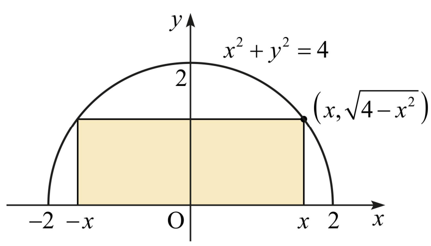
$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2\cos x}{(2\cos x + x + \sin x \cos x) e^{\sin x}}$$

이므로, $x \to \infty$일 때 $f'(x)/g'(x) \to 0$이지만 $f(x)/g(x)$는 진동한다. □

5 최적화 문제

최적화 문제란 주어진 제한 조건을 만족시키면서 가장 좋은 해를 구하는 문제이다. 이 절에서는 미분을 활용하여 최적화 문제를 해결하는 예를 살펴보자.

보기 11. 그림과 같이 반지름이 2이고 중심각의 크기가 180°인 부채꼴에 직사각형이 내접하고 있다. 내접하는 직사각형 중에서 넓이가 최대인 것을 구해 보자.



부채꼴과 직사각형을 좌표평면에 그림과 같이 두었을 때 호와 만나는 직사각형의 꼭지점의 좌표를 $(x, \sqrt{4-x^2})$이라고 하자.

그러면

$$(\text{직사각형의 가로 길이}) = x,$$
$$(\text{직사각형의 세로 길이}) = \sqrt{4-x^2},$$
$$(\text{직사각형의 넓이}) = 2x\sqrt{4-x^2}$$

이다. 여기서 x의 범위는 $0 \le x \le 2$이다.

이제 이 문제는 정의역 $[0, 2]$에서

$$f(x) = 2x\sqrt{4-x^2}$$

이라고 정의된 함수 f의 최댓값을 구하는 문제와 같다. f의 도함수는 다음과 같다.

$$f'(x) = \frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2\sqrt{4-x^2}.$$

이 도함수의 값이 0이 되는 값을 구하면 $x = \pm\sqrt{2}$이다. 두 근 중에서 $[0, 2]$에 속하는 것은 $\sqrt{2}$뿐이다. 이제 $\sqrt{2}$와 $[0, 2]$의 양 끝점에서 f의 함숫값을 구하면 다음과 같다.

$$f(\sqrt{2}) = 4, \quad f(0) = f(2) = 0.$$

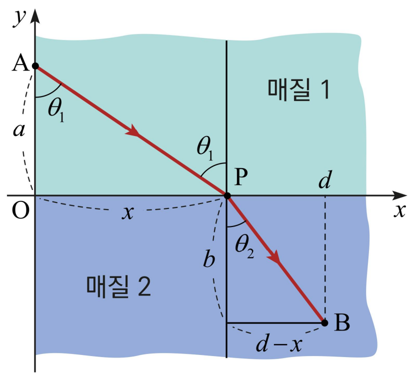
그러므로 $x = \sqrt{2}$일 때 f는 최댓값을 가진다.

따라서 직사각형의 가로의 길이가 $2\sqrt{2}$일 때, 직사각형은 최대넓이 4를 가진다.

보기 12. 빛의 속력은 빛이 통과하는 매질에 의해 달라지는데, 일반적으로 매질의 밀도가 높을수록 속력이 작아진다.

광학에서 페르마의 원리에 따르면, 빛은 한 점에서 다른 점까지 걸리는 시간이 최소인 경로를 따라 이동한다. 빛의 속력이 c_1인 한 매질의 점 A로부터 빛의 속력이 c_2인 다른 매질의 점 B까지 광선이 이동하는 경로를 구해 보자.

A에서 B로 이동하는 빛은 가장 빠른 경로를 따르기 때문에, 이동 시간을 최소화하는 경로를 찾아야 한다. 그림과 같이 A와 B가 xy평면에 있다고 하고, 두 매질의 경계에 해당하는 직선을 x축으로 두자.



매질이 고르면 빛의 속력이 상수이므로, 한 종류의 매질을 통과하는 동안 '가장 짧은 시간'은 '가장 짧은 경로'를 뜻하며, 광선은 직선을 따라 이동한다. 그러므로 A로부터 B까지의 경로는 A로부터 경계점 P까지의 선분과 P로부터 B까지의 또 다른 선분으로 이루어진다.

그림에서 빛이 A로부터 P까지 이동하는 데 걸리는 시간은 다음과 같다.

$$t_1 = \frac{\overline{AP}}{c_1} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c_1}$$

그림에서 빛이 P로부터 B까지 이동하는 데 걸리는 시간은 다음과 같다.

$$t_2 = \frac{\overline{PB}}{c_2} = \frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{c_2}$$

빛이 A로부터 B까지 이동하는 데 걸리는 시간은 다음과 같다.

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{c_2}$$

이 식에서 t는 x를 변수로 하는 함수이며, 정의역은 닫힌구간 $[0,\ d]$이다. 이제 t의 최솟값을 구하자. t의 도함수는 다음과 같다.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{c_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{c_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$$

이 식을 그림에 있는 각 θ_1과 θ_2를 사용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sin\theta_1}{c_1} - \frac{\sin\theta_2}{c_2}$$

t의 도함수는 $x=0$에서 음수이고, $x=d$에서 양수이다. dt/dx가 $[0,\ d]$에서 연속이므로 사잇값 정리에 의하여 0과 d 사이에 있는 적당한 점 x_0이 존재하여 $dt/dx=0$을 만족시킨다. dt/dx가 x를 변수로 하는 순증가함수이므로, $dt/dx=0$을 만족시키는 점 x_0은 0과 d 사이에 딱 하나만 존재한다. 그 점에서 다음이 성립한다.

$$\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2}$$

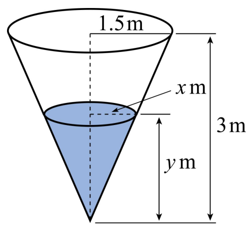
이 공식을 **스넬의 법칙**(Snell's law) 또는 **굴절 법칙**(law of refraction)이라고 부른다.

(이 보기는 Thomas Calculus 13판 4.6절 Example 4에서 발췌하였음.)

6 연계변화율

한 변수가 변함에 따라 그와 연계된 다른 변수가 함께 변하는 경우가 있다. 알고 있는 변수의 변화율을 사용하여 다른 변수의 변화율을 구하는 문제를 **연계변화율**(relative rate of change) **문제**라고 부른다. 이 절에서는 연계변화율 문제를 해결하는 예를 살펴보자.

보기 13. 그림과 같이 원뿔 모양의 물탱크에 1분에 $0.25\ \mathrm{m}^3$씩 물을 채우고 있다. 물탱크는 꼭짓점이 아래쪽을 향하고 있고 높이가 $3\ \mathrm{m}$이며, 밑면의 반지름의 길이는 $1.5\ \mathrm{m}$이다. 물의 높이가 $1.8\ \mathrm{m}$가 되는 순간 물의 높이가 증가하는 속력을 구해 보자.



다음과 같이 변수를 정하자.

V = (시각이 t분일 때 물의 부피) (m^3)

x = (시각이 t분일 때 수면의 반지름) (m)

y = (시각이 t분일 때 물의 높이) (m)

이제 문제는 조건

$$y = 1.8\ \mathrm{m}, \quad \frac{dV}{dt} = 0.25\ \mathrm{m}^3/\mathrm{min}$$

아래에서 dy/dt를 구하는 것이다.

물의 부피는

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$$

이다. 여기서

$$\frac{x}{y} = \frac{1.5}{3}, \quad x = \frac{y}{2}$$

이므로 물의 부피는

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 y = \frac{\pi}{12}y^3$$

이다. 따라서 연쇄법칙을 사용하면

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{12} \times 3y^2 \times \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4} \times y^2 \times \frac{dy}{dt}$$

이다. 여기에 $y = 1.8$, $dV/dt = 0.25$를 대입하면

$$0.25 = \frac{\pi}{4} \times (1.8)^2 \times \frac{dy}{dt}$$

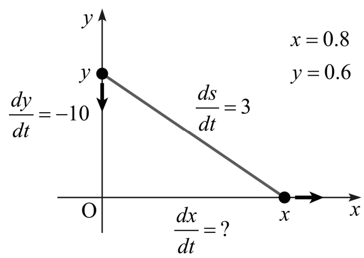
이므로

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{3.24\pi} \fallingdotseq 0.098 \ (\text{m/min})$$

이다. 그러므로 물의 높이가 1.8 m가 되는 순간 물의 높이가 증가하는 속력은 0.098 m/min이다.
(이 보기는 Thomas Calculus 13판 3.10절 Example 1에서 발췌하였음.)

보기 14. 민호가 민지에게 전해줄 편지가 있어서 민지를 향해 달려가는데, 민지는 민호가 오는 줄도 모르고 자기 갈 길을 열심히 달려가고 있다. 민호는 북쪽에서 교차로를 향해 남쪽으로 달리고 있고, 민지는 교차로를 막 지나 동쪽으로 달리고 있다. 민호와 교차로의 거리가 0.6 km일 때 교차로와 민지의 거리는 0.8 km이었다. 이때 민호와 민지 사이의 거리가 3 km/h의 속력으로 증가하고 있었고, 그때 민호의 속력이 10 km/h이었다면, 민지의 속력은 얼마인지 구해 보자.

교차로를 좌표평면의 원점에 두고 민호의 위치를 y축 위의 점, 민지의 위치를 x축 위의 점으로 나타내면 그림과 같다. t가 시간을 나타내는 변수라고 하고, 다음과 같이 변수를 정하자.



x = (시각이 t시간일 때 교차로와 민지의 거리)
y = (시각이 t시간일 때 교차로와 민호의 거리)
s = (시각이 t시간일 때 민호와 민지의 거리)

그러면 문제는

$$x = 0.8 \ (\text{km}), \quad y = 0.6 \ (\text{km}), \quad \frac{dy}{dt} = -10 \ (\text{km/h}), \quad \frac{ds}{dt} = 3 \ (\text{km/h})$$

일 때 dx/dt를 구하는 것이다.

피타고라스 정리에 의하여

$$s^2 = x^2 + y^2$$

이며, 이 식의 양변을 t에 대하여 미분하면 다음을 얻는다.

$$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{1}{s}\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right).$$

이 식에 $x=0.8$, $y=0.6$, $dy/dt=-10$, $ds/dt=3$을 대입한 후 dx/dt에 대하여 풀면 다음을 얻는다.

$$3=\frac{1}{0.8^2+0.6^2}\left(0.8\times\frac{dx}{dt}+0.6\times(-10)\right),$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{3\sqrt{0.8^2+0.6^2}+0.6\times 10}{0.8}=11.25.$$

따라서 민지의 속력은 11.25 km/h이다. 안타깝게도 민호가 민지를 따라잡지 못할 것이다.
(이 보기는 Thomas Calculus 13판 3.10절 Example 3에서 발췌하였음.)

연습문제

방정식과 부등식

1. x에 대한 방정식 $x^3+\frac{3}{x}=k$가 서로 다른 두 개의 근을 갖도록 하는 상수 k의 값을 구하시오.

2. $x>0$일 때 $\ln x\le\frac{x}{e}$임을 보이시오.

3. [모든 양수 x에 대하여 $(\ln x)^2-4\ln x\ge a$]가 성립하도록 하는 상수 a의 값을 구하시오.

4. x에 대한 방정식 $3x-2\ln x=a$의 근이 실수 범위에서 존재하지 않도록 하는 상수 a의 값을 구하시오.

5. $f(x)=x^3-3x-1$일 때, x에 대한 방정식 $|f(x)|=a$가 서로 다른 세 개의 실근을 갖도록 하는 상수 a의 값을 구하시오.

6. [모든 실수 x에 대하여 $x\le ke^x$]가 성립하도록 하는 상수 k의 최솟값을 구하시오.

7. 임의의 실수 x, y에 대하여 $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$임을 증명하시오.

8. 함수 f가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분 가능하다고 하자. 또한 $f(a)f(b)<0$이고, 구간 $(a,\ b)$의 임의의 점 x에 대하여 $f'(x)\ne 0$이라고 하자. 이때 방정식 $f(x)=0$의 근이 열린구간 $(a,\ b)$에 단 하나 존재함을 보이시오.

9. n이 2 이상인 자연수이고 함수 $f:[0,\ 1]\to\mathbb{R}$가 $f(x)=\left(x^2-x\right)^n$이라고 정의되어 있다고 하자. 이때 구간 $(0,\ 1)$에 방정식 $f^{(n)}(x)=0$의 서로 다른 근이 n개 존재함을 보이시오.

속도와 가속도

1. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서 위치가 $(x,\ y)$이고, $x=2t$, $y=t^2+1$일 때, $t=2$에서 점 P의 속도, 속력, 가속도, 가속도의 크기를 구하시오.

2. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서 위치가 (x, y)이고,

$$x = t^2, \quad y = 2t - \frac{1}{2}t^2$$

이다.

(1) 점 P의 속력이 4일 때의 시각 t를 구하시오.

(2) 점 P의 속력이 4일 때, 점 P의 속도를 구하시오.

3. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서 위치가 (x, y)이고,

$$x = at^2 + a\sin t, \quad y = a\sin t \quad (a\text{는 양수인 상수})$$

이다. 또한 $t = \frac{\pi}{2}$에서 점 P의 가속도의 크기가 $5\sqrt{2}$이다. 다음 물음에 답하시오.

(1) 상수 a의 값을 구하시오.

(2) $t = \frac{\pi}{2}$에서 점 P의 속도와 속력을 구하시오.

일차근사함수

1. 다음 함수 f와 점 c에 대하여, c에서 f의 일차근사함수를 구하시오.

(1) $f(x) = 3x + 4$, $c = 1$.

(2) $f(x) = 3x + 4$, $c = 2$.

(3) $f(x) = x^2 + 4$, $c = 1$.

(4) $f(x) = x^2 + 4$, $c = 2$.

(5) $f(x) = x^2 + 7$, $c = 3$.

(6) $f(x) = x^2 - 11$, $c = 3$.

(7) $f(x) = -3x^2 + 4x + 1$, $c = -2$.

(8) $f(x) = e^x + \sin x$, $c = 0$.

(9) $f(x) = \ln x$, $c = e$.

(10) $f(x) = \frac{1}{x}$, $c = 1$.

(11) $f(x) = (1+x)^2$, $c = 0$.

(12) $f(x) = (1+x)\sqrt{1+x}$, $c = 0$.

(13) $f(x) = \cos x$, $c = \frac{\pi}{2}$.

(14) $f(x) = \sin^{-1} x$, $c = \frac{\pi}{12}$.

2. 일차근사함수를 사용하여 다음 값의 근삿값을 구하시오.

(1) $7.97^{1/3}$ [$f(x) = x^{1/3}$, $c = 8$을 사용한다.]

(2) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + 0.01\right)$ [$f(x) = \sin x$, $c = \pi/6$을 사용한다.]

(3) $(1.0002)^{50}$ [$f(x) = x^{50}$, $c = 1$을 사용한다.]

(4) $\sqrt[4]{1.009}$ [$f(x) = x^{1/4}$, $c = 1$을 사용한다.]

3. 반지름의 길이가 5 cm인 원이 있다. 이 원의 반지름의 길이를 Δx cm 만큼 늘렸을 때 증가하는 원의 넓이의 근삿값을 일차근사함수를 사용하여 구하시오. [반지름의 길이가 x cm인 원의 넓이를 $f(x)$ cm^{2}으로 두고, $c = 5$에서 $f(x)$의 일차근사함수를 구한다.]

4. 밑면의 반지름의 길이가 6 cm이고 높이가 30 cm인 원뿔이 있다. 이 원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 Δx cm만큼 늘렸을 때 증가하는 원뿔의 부피의 근삿값을 일차근사함수를 사용하여 구하시오. [밑면의 반지름의 길이가 x cm이고 높이가 30 cm인 원뿔의 부피를 $f(x)$ cm^{3}으로 두고, $c = 6$에서 $f(x)$의 일차근사함수를 구한다.]

5. 함수 $y = f(x)$가 점 $x = c$에서 미분 가능하다고 하자. 그리고 $g(x) = m(x-c)+b$가 c에서 f의 또 다른 일차근사함수라고 하자. (여기서 m과 b는 상수이다.) 만약 $x = c$ 근처에서 일차근사함수의 오차 $E(x) = f(x) - g(x)$가 0에 충분히 가까우면 함수 $L(x) = f'(c)(x-c)+f(c)$ 대신 $g(x)$를 c에서 f의 일차근사함수로 사용해도 될 것이다. 이제 $L(x)$가 c에서 f의 일차근사함수로서 가장 적절한 함수임을 보이려고 한다. 함수 g가 다음 두 조건을 만족시킨다고 가정하자.

   (i) $E(c) = 0$ (ii) $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{E(x)}{x-c} = 0$

   이때 $g(x) = f'(c)(x-c) + f(c)$임을 보이시오.

로피탈의 법칙

1. 로피탈의 법칙을 사용하여 다음 극한을 구하시오.

   (1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x - \sin x}{x}$ (2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

   (3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1-x/2}{x^2}$ (4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x+x^2}$

   (5) $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\sin x}{x^2}$ (6) $\lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{\sin x}{x^2}$

   (7) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x^2}$ (8) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\sec x}{1+\tan x}$

2. 로피탈의 법칙을 사용하여 다음 극한을 구하시오.

   (1) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x \sin \dfrac{1}{x}\right)$ (2) $\lim\limits_{x \to 0+} \sqrt{x} \ln x$

   (3) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right)$ (4) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x - \sqrt{x^2+x}\right)$

   (5) $\lim\limits_{x \to \infty} (\ln 2x - \ln(x+1))$ (6) $\lim\limits_{x \to 1+} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$

3. 로피탈의 법칙을 사용하여 다음 극한을 구하시오.

   (1) $\lim\limits_{x \to \infty} x^{1/x}$ (2) $\lim\limits_{x \to 1+} x^{1/(1-x)}$

   (3) $\lim\limits_{x \to 1+} x^{1/(x-1)}$ (4) $\lim\limits_{x \to \infty} (\ln x)^{1/x}$

   (5) $\lim\limits_{x \to \infty} x^{1/\ln x}$ (6) $\lim\limits_{x \to 0+} x^2 \ln x$

4. r가 상수일 때 다음을 보이시오.

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{r}{x}\right)^x = e^r$$

5. 코시의 평균값 정리에 기하학적 의미를 부여하려고 한다. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서 위치가 (x, y)이고 $x = g(t)$, $y = f(t)$라고 하자. 두 점 $\mathrm{A}(g(a), f(a))$과 $\mathrm{B}(g(b), f(b))$를 잇는 매끄러운 곡선을 그리면, 곡선에 접하는 직선 중 기울기가 $f'(c)/g'(c)$와 같은 것이 존재함을 설명하시오.

최적화 문제

1. 포물선 $2x = y^2$ 위의 점 중에서 점 $(1,\ 0)$에 가장 가까운 점을 구하시오.
2. 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 2$ 위의 점 중에서 점 $(1,\ 0)$에 가장 가까운 점을 구하시오.
3. 넓이가 $c\ \mathrm{m}^2$인 직사각형 모양의 꽃밭을 만들기 위해 울타리를 치려고 한다. 울타리의 길이가 최소가 되려면 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 얼마로 해야 하는지 구하시오.
4. 부피가 $252\ \mathrm{cm}^2$인 직사각기둥 모양의 상자를 만드려고 한다. 아래쪽 밑면은 cm^2당 50원의 비용이 들고 위쪽 밑면은 cm^2당 20원의 비용이 들며 옆면은 cm^2당 30원이 비용이 든다. 이때 비용을 최소화하기 위해서는 상자의 모서리의 길이를 얼마로 해야 하는지 구하시오.
5. 직사각형 모양의 종이에 인쇄를 하는데 위쪽과 아래쪽 여백은 각각 $3\ \mathrm{cm}$만큼, 왼쪽과 오른쪽 여백은 각각 $5\ \mathrm{cm}$만큼 두고, 인쇄된 영역의 넓이가 $60\ \mathrm{cm}^2$가 되도록 하려고 한다. 종이의 넓이가 최소가 되도록 하려면 종이의 가로 길이와 세로 길이를 얼마로 해야 하는지 구하시오.
6. 반지름의 길이가 $R\ \mathrm{cm}$인 원이 있다. 이 원에 내접하는 직사각형 중에서 넓이가 가장 큰 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 구하시오.
7. 반지름의 길이가 $R\ \mathrm{cm}$인 원이 있다. 이 원에 내접하는 이등변삼각형 중에서 넓이가 가장 큰 이등변삼각형의 밑변의 길이와 높이를 구하시오.
8. 부피가 $V\ \mathrm{cm}^3$인 원기둥을 만드려고 한다. 원기둥의 겉넓이가 최소가 되도록 하려면 원기둥의 밑면의 반지름의 길이와 높이를 각각 얼마로 해야 하는지 구하시오.
9. 반지름의 길이가 $R\ \mathrm{cm}$인 구가 있다. 이 구에 내접하는 원기둥 중에서 부피가 가장 큰 원기둥의 밑면의 반지름의 길이와 높이를 구하시오.
10. 반지름의 길이가 $R\ \mathrm{cm}$인 구가 있다. 이 구에 내접하는 원뿔 중에서 부피가 가장 큰 원뿔의 밑면의 반지름의 길이와 높이를 구하시오.

연계변화율

1. x와 y가 t의 함수이고 $y = 5x$이다. $dx/dt = 2$일 때 dy/dt를 구하시오.
2. x와 y가 t의 함수이고 $2x + 3y = 12$이다. $dy/dt = -2$일 때 dx/dt를 구하시오.
3. x와 y가 t의 함수이고 $y = x^2$이다. $dx/dt = 3$이고 $x = -1$일 때 dy/dt를 구하시오.
4. x와 y가 t의 함수이고 $x = y^3 - y$이다. $dy/dt = 5$이고 $y = 2$일 때 dx/dt를 구하시오.
5. x와 y가 t의 함수이고 $x^2 + y^2 = 25$이다. $dx/dt = -2$이고 $x = 3,\ y = -4$일 때 dy/dt를 구하시오.
6. x와 y가 t의 함수이고 $x^2 y^3 = 4/27$이다. $dy/dt = 1/2$이고 $x = 2$일 때 dx/dt를 구하시오.
7. x와 y가 t의 함수이고 $L = \sqrt{x^2 + y^2}$이다. $dx/dt = -1,\ dy/dt = 3$이고 $x = 5,\ y = 12$일 때 dL/dt를 구하시오.

8. r, s, v가 t의 함수이고 $r+s^2+v^3=12$이다. $dr/dt=4$, $ds/dt=-3$이고 $r=3$, $s=1$일 때 dv/dt를 구하시오.

9. 키가 150 cm인 사람이 6 m 높이에 가로등이 설치된 기둥을 향해 1 m/s의 속력으로 다가간다. 사람과 기둥 사이의 거리가 x m일 때, 다음 물음에 답하시오.
   (1) 가로등 불빛에 의해 생긴 사람의 그림자의 머리 끝부분이 기둥을 향해 다가가는 속력을 x에 대한 식으로 나타내시오.
   (2) 가로등 불빛에 의해 생긴 사람의 그림자의 길이가 변하는 속력을 x에 대한 식으로 나타내시오.

10. 로켓을 지표면에 수직인 위쪽 방향으로 400 m/s의 속력으로 쏘아올렸을 때 t초 후 로켓의 높이가 $s=400t-16t^2$ (m)이다. 지표면에서 로켓이 출발한 곳으로부터 1800 m 떨어진 지점에서 로켓까지의 거리의 시간 t에 대한 변화율을 구하시오.

11. 넓이가 800 cm^2인 직사각형이 있다. 이 직사각형이 넓이가 변하지 않으면서 세로의 길이가 초당 4 cm씩 일정한 빠르기로 길어진다. 다음 물음에 답하시오.
   (1) 이 직사각형의 가로의 길이가 초당 0.5 cm의 빠르기로 짧아지는 순간 이 직사각형의 가로의 길이를 구하시오.
   (2) 이 직사각형의 가로의 길이가 초당 0.5 cm의 빠르기로 짧아지는 순간 이 직사각형의 대각선의 길이의 시간에 대한 변화율을 구하시오.

12. 평면에서 점 P가 곡선 $x^2-18y^2=9$, $x>0$을 따라 움직이는데, 점 P의 y좌표는 초당 9만큼 증가한다. 점 P의 x좌표가 9가 되는 순간 점 P의 x좌표의 시간에 대한 변화율을 구하시오.

13. 구 모양의 풍선에 분당 2 m^3 만큼의 공기를 일정한 속력으로 넣는다. 풍선의 반지름의 길이가 50 cm가 되는 순간 시간에 대한 풍선의 반지름의 길이의 증가율을 구하시오.

14. 구의 반지름이 초당 3 cm씩 일정한 빠르기로 커진다. 이 구의 겉넓이가 10 cm^2이 되는 순간 시간에 대한 이 구의 부피의 변화율을 구하시오.

더 깊이 공부하고 싶은 사람을 위한 문제

1. 미분 가능한 함수 f가 주어졌을 때 방정식 $f(x)=0$의 근을 구하는 방법인 '**뉴턴의 방법**(Newton's method)'을 조사해 보자. 또한 함수 f가 다음과 같이 주어졌을 때 뉴턴의 방법을 사용하여 방정식 $f(x)=0$의 근을 구하기 위한 수열 $\{x_n\}$을 구성하고, $\{x_n\}$의 극한을 구해 보자.
   (1) $f(x)=x^2-2$, $x_0=3$.
   (2) $f(x)=x^2-2$, $x_0=-1$.
   (3) $f(x)=x^3-7x$, $x_0=1$
   (4) $f(x)=1-x^2$, $x_0=0$.
   (5) $f(x)=x^3-2x+2$, $x_0=0$.
   (6) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x=1$.

영어로 표현하기 (미분)

- ☐ A function f is said to be differentiable at a point $a \in \mathbb{R}$ if and only if f is defined on some open interval I containing a and the limit
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
exists. In this case, this limit is called the derivative of f at a, and denoted $f'(a)$.

- ☐ $f'(a)$ is read as "f prime of a," and
$$\frac{dy}{dx}$$
is read as "the derivative of f with respect to x", or "dy by dx."

- ☐ Let f be a function that has a derivative at every point in its domain. We can then define a function that maps every point x to the value of the derivative of f at x. This function is written f' and is called the derivative function or the derivative of f.

- ☐ Sometimes f has a derivative at most, but not all, points of its domain. The function whose value at a equals $f'(a)$ whenever $f'(a)$ is defined and elsewhere is undefined is also called the derivative of f. It is still a function, but its domain may be smaller than the domain of f.

- ☐ The second derivative, or the second order derivative, of a function f is the derivative of the derivative of f.

- ☐ If a function f is differentiable at a, then f is continuous at a. The converse of this statement in general is false.

- ☐ Let f and g be real functions. If f is differentiable at a and g is differentiable at $f(a)$, then $g\circ f$ is differentiable at a with $(g\circ f)'(a)=g'(f(a))f'(a)$.

- ☐ Suppose that a and b are real numbers with $a<b$. If f is continuous on $[a, b]$, differentiable on (a, b), and if $f(a)=f(b)$, then $f'(c)=0$ for some $c\in(a, b)$.

- ☐ Suppose that a and b are real numbers with $a<b$. If f is continuous on $[a, b]$ and differentiable on (a, b), then there is a $c\in(a, b)$ such that
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

- ☐ If $f'(x)=0$ at each point x of an open interval I, then f is a constant function on I. If $f'(x)=g'(x)$ at each point x in an open interval I, then there exists a constant C such that $f(x)=g(x)+C$ for all $x\in I$, that is, $f-g$ is a constant function on I.

- ☐ Suppose that f is continuous on $[a, b]$ and differentiable on (a, b). If $f'(x)>0$ at each point $x\in(a, b)$, then f is increasing on $[a, b]$. If $f'(x)<0$ at each point $x\in(a, b)$, then f is decreasing on $[a, b]$.

- ☐ Let $y=f(x)$ be twice-differentiable on an interval I. If $f''>0$ on I, the graph of f over I is concave up. If $f''<0$ on I, the graph of f over I is concave down.

☐ Suppose that c is a critical point of a continuous function f, and that f is differentiable at every point in some interval containing c except possibly at c itself. Moving across this interval from left to right, if f' changes from negative to positive at c, then f has a local minimum at c.

☐ A point $(c, f(c))$ where the graph of a function has a tangent line and where the concavity changes is a point of inflection.

☐ Suppose that f'' is continuous on an open interval that contains $x=c$. If $f'(c)=0$ and $f''(c)<0$, then f has a local maximum at $x=c$.

☐ We use $0/0$ as a notation for an expression known as an indeterminate form. Other meaningless expression often occur, such as ∞/∞, $\infty \cdot 0$, $\infty-\infty$, 0^0, and 1^∞, which cannot be evaluated in a consistent way; these are called indeterminate forms as well.

☐ Suppose that $f(a)=g(a)=0$, that f and g are differentiable on an open interval I containing a, and that $g'(x)\neq 0$ on I if $x\neq a$. Then

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

assuming that the limit on the right side of this equation exists.

☐ Suppose that y is a differentiable function of x satisfying $x^2-xy-y^2=3$. Use implicit differentiation to find dy/dx.

☐ Find the line tangent to the graph of $y=1/x$ at $x=2$.

☐ Find the point(s) on the hyperbola $x^2-y^2=2$ closest to the point $(0, 1)$.

☐ The length of a rectangle of constant area 800 square meters is increasing at the rate of 4 meters per second. What is the width of the rectangle at the moment the width is decreasing at the rate of 0.5 meter per second?

☐ Suppose that x and y are differentiable functions of t. If $y=x^2$ and $dx/dt=3$, then what is dy/dt when $x=-1$?

열한 번째 이야기

역도함수와 부정적분

물체의 위치를 시각에 대하여 미분하여 속도와 가속도를 구하는 것처럼, 물체의 가속도를 사용하여 속도를 구하거나 속도를 사용하여 위치를 구할 수 있는데, 이때 미분의 역연산이 사용된다. 다양한 문제를 해결할 때 미분이 사용되는 것처럼, 미분의 역연산 또한 문제해결 과정에서 유용하게 사용된다.

이 단원에서는 미분의 역연산으로써 얻는 함수인 역도함수와 부정적분을 살펴보자.

1 역도함수와 부정적분

I가 길이가 양수인 구간이고 두 함수 F와 f가 I에서 정의되어 있다고 하자. 만약 F가 I에서 미분가능하고 I의 모든 점 x에서

$$F'(x) = f(x)$$

가 성립할 때, F를 f의 **역도함수**(antiderivative)라고 부른다.

또한 I에서 f의 모든 역도함수를 f의 **부정적분**(indefinite integral)이라고 부르며,[44] 이것을 기호로

$$\boxed{\int f(x)\,dx}$$

"인테그랄 f x d x"

와 같이 나타낸다. 이와 같은 표현에서 f를 **피적분함수**(integrand)라고 부르며 x를 **적분변수**(integral variable)라고 부른다.

두 함수 F와 G가 구간 I에서 f의 역도함수이면

$$F'(x) = f(x) = G'(x)$$

이므로 다음이 성립한다.

$$\{G(x) - F(x)\}' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

그런데 구간에서 도함수가 0인 함수는 상수함수이므로, 이 상수를 C라고 하면

$$G(x) - F(x) = C \quad \text{즉} \quad G(x) = F(x) + C$$

이다. 따라서 구간 I에서 함수 f의 한 역도함수를 F라고 하면 f의 부정적분은

$$F(x) + C$$

와 같은 꼴로 나타낼 수 있다. 이때 C를 **적분상수**라고 부른다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

정리 1. I가 길이가 양수인 구간이고 F가 구간 I에서 함수 f의 한 역도함수라고 하자. 그러면 구간 I에서 함수 f의 부정적분은 다음과 같다.

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

44) 책에 따라서는 '역도함수'와 '부정적분'을 같은 의미로 사용하기도 한다.

보기 **1.** 간단한 역도함수의 예를 살펴보자.

(1) $y=4x$일 때 $y'=4$이므로, $\int 4\,dx=4x+C.$

(2) $y=x^2$일 때 $y'=2x$이므로, $\int 2x\,dx=x^2+C.$

일반적으로 n이 자연수일 때 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)=x^n \text{ 이므로 } \int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C.$$

한편 k가 상수일 때 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dx}(kx)=k\text{이므로 } \int k\,dx=kx+C.$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

정리 **2. 상수와 x^n의 부정적분**

(1) k가 상수일 때, $\int k\,dx=kx+C$ (단, C는 적분상수)

(2) n이 자연수일 때, $\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ (단, C는 적분상수)

두 함수 f, g의 역도함수를 각각 F, G라고 할 때 다음이 성립한다.

$$\int f(x)dx=F(x)+C_1,\quad \int g(x)dx=G(x)+C_2 \quad (\text{단, } C_1\text{과 } C_2\text{는 적분상수}).$$

이때 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 구해 보자.

먼저 함수 kf의 부정적분을 구해 보자. k가 상수일 때

$$\frac{d}{dx}(kF(x))=kF'(x)=kf(x)$$

이므로

$$\int kf(x)dx=kF(x)+C_3 \quad (\text{단, } C_3\text{은 적분상수})$$

이다. 한편

$$k\int f(x)dx=k\{F(x)+C_1\}=kF(x)+kC_1$$

이다 여기서 C_1, C_3은 임의의 상수이므로

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$$

이다.

다음으로 함수 $f+g$의 부정적분을 구해 보자.

$$\frac{d}{dx}\{F(x)+G(x)\}=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x)$$

이므로

$$\int\{f(x)+g(x)\}dx=F(x)+G(x)+C_4 \quad (\text{단, } C_4\text{는 적분상수})$$

이다. 한편

$$\int f(x)dx+\int g(x)dx=F(x)+G(x)+(C_1+C_2)$$

이다. 여기서 C_1, C_2, C_4는 임의의 상수이므로

$$\int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$$

이다.

같은 방법으로 함수 $f-g$의 부정적분을 구하면

$$\int\{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

정리 3. 구간 I에서 두 함수 f, g가 각각 역도함수를 가질 때 다음이 성립한다.

(1) $\displaystyle\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (단, k는 0이 아닌 실수)

(2) $\displaystyle\int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

(3) $\displaystyle\int\{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

보기 2. 다음 부정적분을 구해 보자.

$$\int(5x^4-8x^3+4x-3)dx$$

정리 2와 정리 3을 사용하여 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\int(5x^4-8x^3+4x-3)dx&=5\int x^4dx-8\int x^3dx+4\int x\,dx-\int 3\,dx\\&=5\left(\frac{1}{5}x^5+C_1\right)-8\left(\frac{1}{4}x^4+C_2\right)+4\left(\frac{1}{2}x^2+C_3\right)-(3x+C_4)\\&=x^5-2x^4+2x^2-3x+(5C_1-8C_2+4C_3-C_4)\end{aligned}$$

이때 C_1, C_2, C_3, C_4가 모두 상수이므로 $C=5C_1-8C_2+4C_3-C_4$라고 하면 다음을 얻는다.

$$\int(5x^4-8x^3+4x-3)dx=x^5-2x^4+2x^2-3x+C \quad (C\text{는 적분상수})$$

2 여러 가지 함수의 부정적분

8단원에서 살펴본 다양한 함수의 미분 공식으로부터 여러 가지 함수의 부정적분 공식을 얻을 수 있다.

α가 실수이고 $\alpha \neq -1$일 때

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right\}=x^{\alpha}$$

이므로

$$\int x^{\alpha}\,dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$$

이다. 한편 $\alpha=-1$일 때는 로그함수의 미분으로부터

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|)=\frac{1}{x}$$

이므로, x의 범위가 한 구간일 때

$$\int \frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+C$$

이다.

정리 4. α가 실수일 때 함수 $y=x^{\alpha}$의 부정적분은 다음과 같다.

(1) $\alpha \neq -1$일 때 $\displaystyle\int x^{\alpha}\,dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$ (C는 적분상수)

(2) $\alpha=-1$일 때 $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+C$ (C는 구간마다 상수)

참고 정리 4의 (2)에서 x의 범위가 한 구간이 아니면 C가 상수가 아닐 수 있다. 예컨대

$$f(x)=\begin{cases}\ln|x|+3 & \text{if } x<0,\\ \ln|x|-4 & \text{if } x>0\end{cases}$$

이면 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$이지만 $f(x)=\ln|x|+C$에서 C가 상수가 아니다.

따라서 이 책에서 '적분상수'라고 할 때는 '구간마다 상수'를 의미하는 것으로 약속한다. □

보기 3. x^{α} 꼴 함수의 부정적분을 구하는 예를 살펴보자.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,dx=\int x^{-2}\,dx=\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}+C=-\frac{1}{x}+C.$

(2) $\displaystyle\int \frac{2}{x}\,dx=\int 2x^{-1}\,dx=2\ln|x|+C.$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C.$

피적분함수가 분수식이고 분수식의 분모가 x의 거듭제곱 꼴일 때는 피적분함수를 x^α 꼴의 함수의 합으로 변형하여 부정적분을 구할 수 있다.

보기 4. 간단한 분수함수의 부정적분을 구하는 예를 살펴보자.

(1) $\displaystyle\int \frac{x^3-3x^2+5}{x^3}dx=\int\left(1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^3}\right)dx=x-3\ln|x|-\frac{5}{2x^2}+C.$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{\sqrt{x}}dx=\int\left(x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-2\sqrt{x}+C.$

지수함수의 미분법으로부터 곧바로 얻을 수 있는 부정적분 공식은 다음과 같다.

정리 5. 지수함수의 부정적분

(1) $\displaystyle\int e^x\,dx=e^x+C$

(2) $\displaystyle\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$ (단, $a>0$, $a\neq 1$)

보기 5. 지수함수의 부정적분을 구하는 예를 살펴보자.

(1) $\displaystyle\int e^{x+2}dx=\int e^2e^xdx=e^2e^x+C=e^{x+2}+C.$

(2) $\displaystyle\int(2^{3x}-5^{-x})dx=\int\left\{8^x-\left(\frac{1}{5}\right)^x\right\}dx=\frac{8^x}{\ln 8}-\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\ln\frac{1}{5}}+C=\frac{2^{3x}}{3\ln 2}+\frac{5^{-x}}{\ln 5}+C.$

삼각함수의 미분법으로부터 곧바로 얻을 수 있는 부정적분 공식은 다음과 같다.

정리 6. 삼각함수의 부정적분

(1) $\displaystyle\int \sin x\,dx=-\cos x+C$ (2) $\displaystyle\int \cos x\,dx=\sin x+C$

(3) $\displaystyle\int \sec^2 x\,dx=\tan x+C$ (4) $\displaystyle\int \csc^2 x\,dx=-\cot x+C$

(5) $\displaystyle\int \sec x\tan x\,dx=\sec x+C$ (6) $\displaystyle\int \csc x\cot x\,dx=-\csc x+C$

보기 6. 삼각함수의 부정적분을 구하는 예를 살펴보자.

(1) $\displaystyle\int(3\cos x-2\sin x)dx=3\sin x+2\cos x+C.$

(2) $\displaystyle\int\frac{2+\cos x}{\sin^2 x}dx=\int(2\csc^2 x+\csc x\cot x)dx=-2\cot x-\csc x+C.$

보기 **7.** 삼각함수를 변형하여 부정적분을 구하는 예를 살펴보자.

(1) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}dx = \int \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x}dx$

$= \int (1-\cos x)dx = x - \sin x + C.$

(2) $\int \tan^2 x\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int (\sec^2 x - 1)dx = \tan x - x + C.$

(3) $\int \cot^2 x\, dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx = \int (\csc^2 x - 1)dx = -\cot x - x + C.$

로그함수, 탄젠트 등 이 단원에서 소개하지 않은 함수를 적분하기 위해서는 다른 적분 방법이 필요하다. 이와 관련된 내용은 14단원에서 살펴볼 것이다.

3 미분방정식과 초깃값 문제

함수 f의 역도함수를 구하는 문제는

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \qquad \cdots ㉠$$

를 만족시키는 함수 y를 구하는 것과 같다. 이처럼 미분연산자가 포함된 식에서 미분하기 전 함수를 찾는 방정식을 **미분방정식**(differential equation)이라고 부르며, 미분하기 전 함수를 미분방정식의 **해**(solution)라고 부른다.

일반적으로 ㉠을 만족시키는 함수 y는 무수히 많을 수 있다. 하지만 특정한 점 $x = x_0$에서 함숫값 y_0이 정해진다면 ㉠을 만족시키는 함수의 개수를 줄일 수 있다. 이와 같은 조건 $x = x_0$, $y = y_0$을 **초기조건**(initial condition)이라고 부르고, 초기조건과 미분방정식이 결합된 문제를 **초깃값 문제**(initial value problem)라고 부른다.

보기 **8.** 다음 초깃값 문제의 해를 구해 보자.

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 7, \quad y(2) = 0.$$

$y = x^2 - 7x$라고 하면 $y'(x) = 2x - 7$이므로 $y = x^2 - 7x$는 주어진 미분방정식의 한 해이다. 따라서 주어진 미분방정식의 일반해는

$$y = x^2 - 7x + C \quad (C\text{는 상수})$$

이다. 이 식에 초기조건 $x = 2$, $y = 0$을 대입하면

$$0 = 2^2 - 7 \times 2 + C$$

이므로 $C = 10$이다. 그러므로 초깃값 문제의 해는 $y = x^2 - 7x + 10$이다.

㉠의 도함수를 이계도함수로 바꾸어도 같은 방법으로 초깃값 문제의 해를 구할 수 있다.

보기 **9.** 다음 초깃값 문제의 해를 구해 보자.

$$\frac{d^2s}{(dt)^2} = \frac{3t}{8}, \quad \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=4} = 3, \quad s(4) = 4.$$

먼저 s'을 구하자.

$$\int \frac{3t}{8} dt = \frac{3}{16}t^2 + C_1$$

이므로 일반해는 $s' = \frac{3}{16}t^2 + C_1$이며, 여기에 초기조건 $t = 4$, $s' = 3$을 대입하면

$$3 = 3 + C_1$$

이다. 따라서 $C_1 = 0$이다.45)

다음으로 s를 구하자.

$$\int s' dt = \int \left(\frac{3}{16}t^2\right) dt = \frac{1}{16}t^3 + C_2$$

이므로 일반해는 $s = \frac{1}{16}t^3 + C_2$이며, 여기에 초기조건 $t = 4$, $s = 4$를 대입하면

$$\frac{1}{16} \times 4^3 + C_2 = 4$$

즉 $C_2 = 0$이다. 그러므로 초깃값 문제의 해는 $s = \frac{1}{16}t^3$이다.

보기 **10.** 원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t) = 6t - 3t^2$이라고 하자. 시각 $t = 4$에서 점 P의 위치를 구해 보자.

시각 t에서 P의 위치를 $s(t)$라고 하자. 그러면 이 문제는 두 조건

$$s'(t) = 6t - 3t^2, \quad s(0) = 0$$

을 만족시키는 $s(t)$를 구하는 초깃값 문제이다.

$$\int (6t - 3t^2) dt = 3t^2 - t^3 + C \quad (C\text{는 적분상수})$$

이므로 일반해는 $s = 3t^2 - t^3 + C$이며, 이 식에 초기조건 $t = 0$, $s = 0$을 대입하면

$$s = 3t^2 - t^3$$

을 얻는다. 이 식에 $t = 4$를 대입하면

$$s = 3 \times 4^2 - 4^3 = 48 - 64 = -16$$

이다. 그러므로 시각 $t = 4$에서 점 P의 위치는 -16이다.

45) 여기서 C_1은 적분상수이므로 본래 '임의의 상수'이다. 하지만 미분 방정식을 푸는 과정에서 "$C_1 = 0$이다."와 같은 표현은 여러 개의 역도함수 중 하나를 택하는 과정을 간단하게 표현한 것이다.

연습문제

개념에 익숙해지기 위한 문제

1. 다음 함수 f의 부정적분을 구하시오.

(1) $f(x)=x$
(2) $f(x)=9x^8$
(3) $f(x)=e^{3x}$
(4) $f(x)=e^{-3x}$
(5) $f(x)=3$
(6) $f(x)=-4x$

2. 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int 4x^3\,dx$
(2) $\int \frac{x}{3}\,dx$
(3) $\int 7\,dx$
(4) $\int k^2\,dx$ (k는 상수)
(5) $\int x\cdot x^2\,dx$
(6) $\int \frac{x}{c}\,dx$ (c는 0이 아닌 상수)
(7) $\int \left(\frac{2}{x}+\frac{x}{2}\right)dx$
(8) $\int x\sqrt{x}\,dx$
(9) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}}+2\sqrt{x}\right)dx$
(10) $\int \frac{7}{2e^{2x}}\,dx$

3. 다음 조건을 만족시키는 함수 f를 구하시오.

(1) $f'(x)=0.5e^{-0.2x}$, $f(0)=0$.
(2) $f'(x)=2x-e^{-x}$, $f(0)=1$.
(3) $f'(x)=x$, $f(0)=3$.
(4) $f'(x)=8x^{1/3}$, $f(1)=4$.
(5) $f'(x)=\sqrt{x}+1$, $f(4)=0$.
(6) $f'(x)=x^2+\sqrt{x}$, $f(1)=3$.

개념을 다지기 위한 문제

4. 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int \cos 2x\,dx$
(2) $\int 3\sin 3x\,dx$
(3) $\int \frac{1}{2}\cos\frac{x}{7}\,dx$
(4) $\int 2\sin\frac{x}{2}\,dx$
(5) $\int (\cos x-\sin x)dx$
(6) $\int \left(2\sin 3x+\frac{\cos 2x}{2}\right)dx$
(7) $\int (-\sin x+3\cos(-3x))dx$
(8) $\int \sin(-2x)dx$
(9) $\int \sin(4x+1)dx$
(10) $\int \cos\frac{x-2}{2}\,dx$
(11) $\int 7\sin(3x-2)dx$
(12) $\int (\cos(2x)+3)dx$

5. 함수 f가 미분 가능한 함수이고 $f'(x)=1+2x+3x^2+\cdots+10x^9$이며 $f(0)=0$이다. 이때 $f(1)$의 값을 구하시오.

6. 함수 f가 다항함수이고 F가 f의 한 역도함수이다. 또한 임의의 실수 x에 대하여 $F(x)=xf(x)-5x^3+4x^2$을 만족시키고, $f(2)=8$이다. 이때 $f(x)$를 구하시오.

7. f와 g가 다항함수이고

$$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2x+3,\quad \frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3x^2+8x-1$$

이며 $f(0)=2$, $g(0)=-5$를 만족시킨다. 이때 $f(x)$와 $g(x)$를 구하시오.

더 깊이 공부하고 싶은 사람을 위한 문제

8. 변수를 분리할 수 있는 미분 방정식(separable equation)의 개념을 조사하고, 다음 미분방정식의 해를 구하시오.

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{5x}{7y}$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{5y}{7x}$

(3) $\dfrac{dy}{dx}=4y$

(4) $\dfrac{dy}{dx}=xy$

(5) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2}{y^3}$

(6) $x+y\dfrac{dy}{dx}=2$

(7) $y\dfrac{dy}{dx}-(1+y)x^2=0$

(8) $y\dfrac{dy}{dx}-(1+y^2)x^2=0$

(9) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+y^2}{1+x^2}$

(10) $(1+x)e^{3y}\dfrac{dy}{dx}=1$

9. 일계선형미분방정식(first-order linear differential equation)의 해를 구하는 방법을 조사하고, 다음 미분방정식의 해를 구하시오.

(1) $x\dfrac{dy}{dx}-x^2-3y=0$, $x>0$

(2) $x\dfrac{dy}{dx}+y=e^x$, $x>0$

(3) $3xy'-y=\ln x+1$, $x>0$

(4) $xy'+3y=\dfrac{\sin x}{x^2}$, $x>0$

(5) $xy'+2y=1-\dfrac{1}{x}$, $x>0$

(6) $(1+x)y'+y=\sqrt{x}$

(7) $2y'=e^{x/2}+y$

(8) $e^{2x}y'+2e^{2x}y=2x$

(9) $xy'-y=2x\ln x$

(10) $x\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos x}{x}-2y$, $x>0$


BJKIM
JUST DO INT.

정적분의 정의와 기본 성질

다각형이나 원과 같은 단순한 모양의 도형은 넓이를 구하기가 쉽지만 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 일은 간단하지 않다. 연속함수의 그래프로 둘러싸인 도형은 직사각형을 사용하여 넓이의 근삿값을 구한 뒤 극한을 사용하여 도형의 넓이를 구할 수 있다.

이 단원에서는 정적분을 정의하고 정적분의 기본 성질을 살펴보자.

1 정적분의 정의

$[a, b]$가 길이가 양수인 닫힌구간이고 함수 f가 $[a, b]$에서 정의되어 있다고 하자. 또한 f가 $[a, b]$에서 연속이고 $[a, b]$의 임의의 점 x에서 $f(x) \geq 0$이라고 하자.

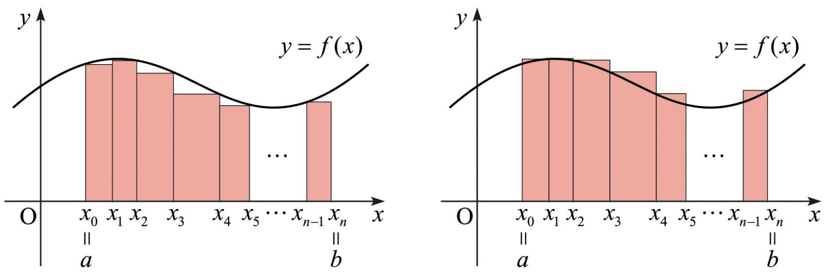
함수 $y = f(x)$의 그래프와 x축, 그리고 두 직선 $x = a$, $x = b$로 둘러싸인 부분을 S라고 하고 그 넓이를 A라고 하자. 구간 $[a, b]$에 $(n+1)$개의 점 x_i가 다음과 같이 있다고 하자.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

그러면 구간 $[a, b]$를 다음과 같이 n개의 **소구간**(sub-interval)으로 쪼갤 수 있다.

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{i-1}, x_i], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$$

i번째 소구간 $[x_{i-1}, x_i]$의 길이를 Δx_i로 나타내자. 즉 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$이다.



소구간 $[x_{i-1}, x_i]$에서 함수 f의 최솟값을 m_i, 최댓값을 M_i로 나타내자. 그러면 다음이 성립한다.

$$m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \cdots + m_n \Delta x_n \leq A \leq M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \cdots + M_n \Delta x_n$$

$m_i \Delta x_i$들의 합을 L_n, $M_i \Delta x_i$들의 합을 U_n으로 나타내면 위 부등식은 다음과 같다.

$$L_n \leq A \leq U_n$$

여기서 L_n을 **하합**(lower sum), U_n을 **상합**(upper sum)이라고 부른다. 만약 소구간의 길이 중 가장 큰 값이 0에 다가가도록 구간을 세밀하게 자르는 극한을 취했을 때 L_n과 U_n이 동일한 값에 수렴한다면, 그 극한값이 곧 A이다.

이와 같은 정의는 $f(x) \geq 0$이라는 조건을 제외해도 똑같이 생각할 수 있다.

또한 함수 f가 연속이라는 조건을 제외한 정의를 생각할 수 있다. 이때는 소구간 $[x_{i-1}, x_i]$에서 f의 최솟값이나 최댓값이 존재하지 않을 수도 있다. 그러나 최솟값과 최댓값 대신 f의 '최대하계'와 '최소상계'를 사용하여 같은 정의를 끌어낼 수 있다.

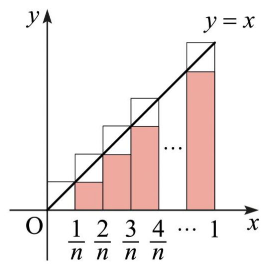
하합 L_n의 극한을 $[a,\ b]$에서 f의 **하적분**(lower integral)이라고 부르고, 상합 U_n의 극한을 $[a,\ b]$에서 f의 **상적분**(upper integral)이라고 부른다. $[a,\ b]$에서 f의 하적분과 상적분이 일치할 때 "f가 $[a,\ b]$에서 적분 가능하다(integrable)."라고 말한다. 그리고 그 값(하적분, 상적분)을 '$[a,\ b]$에서 f의 **정적분**(definite integral)' 또는 간단히 '$[a,\ b]$에서 f의 **적분**'이라고 부르고 다음과 같이 나타낸다.46)

$$\int_a^b f(x)dx$$

"인테그랄 a에서 b까지 f x d x"

만약 구간 $[a,\ b]$에서 f의 하적분과 상적분이 일치하지 않는다면 "f가 $[a,\ b]$에서 **적분 가능하지 않다.**"라고 말한다.

보기 **1.** 구간 $[0,\ 1]$에서 정의된 함수 $f(x)=x$를 생각하자. n이 임의의 자연수라고 하고, 다음과 같은 점 x_i를 생각하자.



$$x_i = \frac{i}{n} \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

그러면 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$일 때 각 소구간 $[x_{i-1},\ x_i]$에서

$$\Delta x_i = \frac{1}{n}, \quad m_i = f(x_{i-1}) = \frac{i-1}{n}, \quad M_i = f(x_i) = \frac{i}{n}$$

이다. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축, 그리고 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 A라고 하면

$$\left\{\frac{0}{n}+\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\right\}\frac{1}{n} \le A \le \left\{\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\right\}\frac{1}{n}$$

이다. 부등식에서 하합과 상합을 각각 계산하면

$$\frac{n(n-1)}{2n^2} \le A \le \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

이므로

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2n} \le A \le \frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$$

이다. 소구간의 길이가 0에 가까워지도록 $[0,\ 1]$을 세밀하게 자르면 n의 값이 점점 커진다. 위 부등식에서 $n \to \infty$인 극한을 취하면

$$\frac{1}{2} \le A \le \frac{1}{2}$$

이므로 $A=\frac{1}{2}$이다. 그러므로 A는 $[0,\ 1]$에서 f의 적분값과 같으며

$$\int_0^1 x\,dx = \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}$$

이다. 이것은 직각을 낀 두 변의 길이가 1인 직각삼각형의 넓이와 일치한다.

46) 이와 같이 정의된 정적분을 **리만 적분**(Riemann integral) 또는 **다르부 적분**(Darboux integral)이라고 부른다. 리만(1826~1866)은 독일의 수학자이다. 다르부(1842~1917)는 프랑스의 수학자이다.

보기 2. 구간 $[0,\ 1]$에서 정의된 함수 $g(x)=x^2$을 생각하자. n이 임의의 자연수라고 하고, 앞의 보기 1에서와 같은 점 x_i를 생각하자. 그러면 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$일 때 각 소구간 $[x_{i-1},\ x_i]$에서

$$\Delta x_i=\frac{1}{n},\quad m_i=g(x_{i-1})=\left(\frac{i-1}{n}\right)^2,\quad M_i=g(x_i)=\left(\frac{i}{n}\right)^2$$

이다. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축, 그리고 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 A라고 하면

$$\left\{\frac{0^2}{n^2}+\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^2}\right\}\frac{1}{n}\ \le\ A\ \le\ \left\{\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+\frac{3^2}{n^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^2}\right\}\frac{1}{n}$$

이다. 부등식에서 하합과 상합을 각각 계산하면

$$\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}\le A\le\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

이다. 보기 1에서와 마찬가지로, 위 부등식에서 $n\to\infty$인 극한을 취하면

$$\frac{1}{3}\le A\le\frac{1}{3}$$

이다. 그러므로

$$\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}$$

이다.

구간 $[a,\ b]$에서 함수 f가 적분 가능할 때 정적분

$$\int_a^b f(x)dx$$

에서 a를 적분의 **아래끝**(lower limit), b를 적분의 **위끝**(upper limit)이라고 부르며, $[a,\ b]$를 **적분구간**(interval of integration)이라고 부른다. 또한 함수 f를 **피적분함수**라고 부르며 x를 **적분변수**라고 부른다. 적분변수를 다른 것으로 바꾸어도 정적분의 의미는 달라지지 않는다. 예컨대 다음은 모두 같은 적분을 나타낸다.

$$\int_a^b f(t)dt,\quad \int_a^b f(s)ds,\quad \int_a^b f(z)dz$$

적분의 아래끝과 위끝이 같을 때, 즉 $a=b$일 때는

$$\int_a^a f(x)dx=0$$

이라고 정의한다. 또한 적분의 아래끝이 위끝보다 클 때, 즉 $a>b$일 때는

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

라고 정의한다.

2 정적분의 성질

지금까지 구간 $[a,\ b]$에서 함수 f의 적분의 정의를 살펴보고, 간단한 함수의 적분을 구해보았다. 이제 자연스럽게 다음과 같은 의문이 생긴다.

- 어떠한 함수가 적분 가능한가?
- 구간 $[a,\ b]$에서 적분 가능한 함수 f가 있을 때, $[a,\ b]$에서 f의 적분을 어떻게 계산하는가?

함수의 적분 가능성에 대하여 다음과 같은 사실이 알려져 있다.47)

> **정리 1.** $[a,\ b]$가 길이가 양수인 닫힌구간이고 f가 $[a,\ b]$에서 정의된 함수라고 하자.
> (1) 함수 f가 $[a,\ b]$에서 연속이면 f는 $[a,\ b]$에서 적분 가능하다.
> (2) $[a,\ b]$에서 f가 유계이고, f가 불연속인 점의 개수가 유한이면 f는 $[a,\ b]$에서 적분 가능하다.

정리 1에 따르면 우리가 일상적으로 사용하는 다항함수, 유리함수, 무리함수, 삼각함수, 지수함수, 로그함수는 각 함수의 정의역에 포함되는 닫힌구간에서 적분 가능하다.

그렇다면 적분을 어떻게 계산할 것인가? **보기 1**과 **보기 2**에서 적분을 계산한 방법을 따라 일반화된 공식을 만들어 보자.

함수 f가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 적분 가능하다고 하자. $[a,\ b]$를 길이가 같은 n개의 소구간으로 쪼개면 소구간의 끝점은 다음과 같은 $(n+1)$개의 점이다.

$$a,\quad a+\frac{b-a}{n}\times 1,\quad a+\frac{b-a}{n}\times 2,\quad a+\frac{b-a}{n}\times 3,\quad \cdots,\quad a+\frac{b-a}{n}k,\quad \cdots,\quad a+\frac{b-a}{n}\times n.$$

k번째 소구간의 오른쪽 끝점에서 함숫값은 $f\left(a+\dfrac{b-a}{n}k\right)$이며, 이 값은

$$m_k \le f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right) \le M_k$$

를 만족시킨다. 그런데 각 소구간의 길이가 $\dfrac{b-a}{n}$로 일정하므로

$$m_k\,\Delta x_k \le f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n} \le M_k\,\Delta x_k$$

이다. $k=1$일 때부터 $k=n$일 때까지의 합을 구하면

$$\sum_{k=1}^{n} m_k\,\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n} \le \sum_{k=1}^{n} M_k\,\Delta x_k$$

이다. 소구간의 길이가 0이 되도록 하는 극한을 취하는 것은 $n\to\infty$인 극한을 취하는 것과 같으며, 이때 이 부등식의 처음 식과 마지막 식은 $[a,\ b]$에서 f의 정적분에 수렴한다.

그러므로 조임 정리에 의하여 다음 등식을 얻는다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x)dx$$

47) 정리 1의 (2)가 적분 가능하기 위한 필요충분조건은 아니다. 즉 불연속인 점의 개수가 무한이지만 적분 가능한 함수가 존재한다. 사실 유계인 함수가 닫힌구간에서 적분 가능하기 위한 필요충분조건은 그 구간에서 불연속인 점들의 모임의 측도가 0인 것이다. 이 정리를 '**르베그의 정리**(Lebesgue's theorem)'라고 부른다. 르베그(1875~1941)는 프랑스의 수학자이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

정리 2. 함수 f가 $[a, b]$에서 적분 가능하면, $[a, b]$에서 f의 적분은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$$

이와 같은 공식을 **구분구적법**(quadrature by parts)이라고 부른다.

보기 3. 다음 정적분을 계산해 보자.

$$\int_1^3 x^2\,dx$$

$a=1,\ b=3,\ f(x)=x^2$이라고 두고 구분구적법을 사용하자.

$$\begin{aligned}\int_1^3 f(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2\times\frac{2}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+2k)^2\times 2}{n^3}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(n^2+4nk+4k^2)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^3}\left\{n^3+4n\times\frac{n(n+1)}{2}+4\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}\\ &= 2+4+\frac{8}{3}=\frac{26}{3}.\end{aligned}$$

다음은 직관적으로 자명한 정적분의 성질이다.

정리 3. 함수 f와 g가 길이가 양수인 닫힌구간 $[a, b]$에서 정의되어 있으며, f와 g가 모두 $[a, b]$에서 적분 가능하다고 하자. 또한 k가 상수라고 하자. 이때 함수 $f+g$, $f-g$, kf는 모두 $[a, b]$에서 적분 가능하며 다음이 성립한다.

(1) $\displaystyle\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

(2) $\displaystyle\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

보기 **4.** 보기 1과 보기 2의 결과에 정리 3을 적용하면 다음과 같이 정적분을 계산할 수 있다.

(1) $\displaystyle\int_0^1 (x^2+x)dx = \int_0^1 x^2\,dx + \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}.$

(2) $\displaystyle\int_0^1 (x^2-x)dx = \int_0^1 x^2\,dx - \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}.$

(3) $\displaystyle\int_0^1 (3x^2-5x)dx = 3\int_0^1 x^2\,dx - 5\int_0^1 x\,dx = 3\times\frac{1}{3}-5\times\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}.$

정리 **4.** 함수 f가 길이가 양수인 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 정의되어 있으며, 이 구간에서 적분 가능하다고 하자. 만약 $a<c<b$이면 f는 $[a,\ c]$와 $[c,\ b]$에서 적분 가능하며 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

참고 정리 4의 등식은 $a,\ b,\ c$의 대소관계가 바뀌어도 성립한다. 예컨대 $a=1,\ b=2,\ c=4$이고 f가 $a,\ b,\ c$를 모두 원소로 갖는 한 닫힌구간에서 적분 가능하면

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^4 f(x)\,dx + \int_4^2 f(x)\,dx$$

가 성립한다. □

보기 **5.** 보기 2와 보기 3의 결과에 정리 4를 적용하면 다음을 얻는다.

$$\int_0^3 x^2\,dx = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^3 x^2\,dx = \frac{1}{3}+\frac{26}{3}=\frac{27}{3}=9.$$

정리 **5.** 함수 f와 g가 길이가 양수인 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 정의되어 있으며, f와 g가 모두 $[a,\ b]$에서 적분 가능하다고 하자. 만약 $[a,\ b]$의 임의의 점 x에 대하여 $f(x)\le g(x)$이면

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

가 성립한다.

증명 미적분학을 처음 공부하는 사람이라면 이 증명을 넘겨도 좋다.

구간 $[a,\ b]$에 있는 $(n+1)$개의 점 x_i가 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$를 만족시킨다고 하자. 이 점을 끝점으로 하는 각 소구간 $[x_{i-1},\ x_i]$의 모든 점 x에서 $f(x)\le g(x)$이다.

구간 $[x_{i-1},\ x_i]$에서 f와 g의 최소상계를 각각 $M_i(f),\ M_i(g)$라 하고 최대하계를 각각 $m_i(f)$, $m_i(g)$라고 하면

$$m_i(f)\le m_i(g) \quad \text{그리고} \quad M_i(f)\le M_i(g)$$

가 성립한다. 그러므로 $[a,\ b]$에서 다음 부등식이 성립한다.

(f의 하합)$\le$(g의 하합), (f의 상합)$\le$(g의 상합).

이 부등식에 소구간의 길이가 0이 되도록 하는 극한을 취하여도 부등호의 방향이 바뀌지 않는다. 이때 두 부등식의 좌변과 우변은 각각 f의 적분과 g의 적분에 수렴하므로

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

가 성립한다. ■

참고 일반적으로 **정리** 5의 역은 성립하지 않는다. 예컨대 구간 $[0,\ 1]$에서

$$f(x) = 3x^2,\quad g(x) = 2$$

라고 하면

$$\int_0^1 f(x)dx = 3\int_0^1 x^2\,dx = 3\times\frac{1}{3} = 1 < 2 = \int_0^1 2\,dx = \int_0^1 g(x)dx$$

이지만, $[0,\ 1]$의 임의의 점에서 $f(x) \le g(x)$가 성립하지는 않는다. □

다음 정리는 연속이 아닌 함수의 적분을 계산할 때 유용하게 사용된다.

정리 6. 함수 f와 g가 길이가 양수인 구간 $[a,\ b]$에서 정의되어 있고, f가 $[a,\ b]$에서 적분 가능하다고 하자. 만약 $[a,\ b]$의 점 x 중에서 $f(x) \neq g(x)$인 것의 개수가 유한이면, 즉 집합

$$\{x \in [a,\ b] \mid f(x) \neq g(x)\}$$

가 유한집합이면, 함수 g는 $[a,\ b]$에서 적분 가능하며 그 적분값은

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$$

이다.

설명 수학을 사랑하는 사람이라면 증명에 도전해 보기 바랍니다. 우리가 배운 내용을 바탕으로 충분히 증명할 수 있습니다. ■

보기 6. 구간 $[0,\ 3]$에서 함수 f가 다음과 같이 정의되어 있다고 하자.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } 0 \le x \le 1 \\ x^2 & \text{if } 1 < x \le 3 \end{cases}$$

그러면 $[0,\ 3]$에서 f의 정적분을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx = \int_0^1 x\,dx + \int_1^3 x^2\,dx = \frac{1}{2} + \frac{26}{3} = \frac{55}{6}.$$

지금까지 정적분을 계산할 때 사용되는 여러 가지 성질들을 살펴보았다. 하지만 지금까지 살펴본 방법만으로 지수함수, 로그함수, 삼각함수의 정적분을 계산하는 것은 대단히 어렵다. 심지어 가장 단순한 함수인 단항함수조차도 구분구적법을 사용하여 적분을 계산하려면 꽤 많은 계산을 해야 한다.

다음 단원에서 정적분을 계산하는 유용한 방법을 살펴볼 것이다.

연습문제

개념에 익숙해지기 위한 문제

1. 함수 f와 g가 닫힌구간 $[1, 5]$에서 적분 가능하고 다음을 만족시킨다.

$$\int_1^2 f(x)dx = -4, \quad \int_1^5 f(x)dx = 6, \quad \int_1^5 g(x)dx = 8.$$

이때 다음을 구하시오.

(1) $\int_2^1 f(x)dx$

(2) $\int_2^5 f(x)dx$

(3) $\int_1^5 (f(x) - g(x))dx$

(4) $\int_1^5 (4f(x) - g(x))dx$

2. 다음 극한을 정적분으로 나타내시오.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(4 + \frac{k}{2n}\right) \times \frac{1}{n}$$

3. 다음 극한을 정적분으로 나타내시오.

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{2 + \frac{k}{n}}$

(2) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{n^{3/2}}$

(3) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

(4) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2 + k^2}$

개념을 다지기 위한 문제

4. 구분구적법을 사용하여 다음 정적분을 구하시오.

(1) $\int_0^b k\,dx$ (k는 상수)

(2) $\int_0^b x\,dx$

(3) $\int_0^b x^2\,dx$

(4) $\int_0^b x^3\,dx$

5. 앞의 문제 4의 결과와 정적분의 성질을 사용하여 다음 정적분을 구하시오.

(1) $\int_a^b k\,dx$ (k는 상수)

(2) $\int_a^b x\,dx$

(3) $\int_a^b x^2\,dx$

(4) $\int_a^b x^3\,dx$

(5) $\int_a^b (px^2 + qx + r)dx$ (p, q, r는 상수)

6. 함수 f가 다음과 같이 정의되어 있다고 하자.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{if } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(1) 구간 $[0, 1]$에서 함수 f에 **정리 2**의 구분구적법 공식을 적용하여 계산해 보시오.

(2) 함수 f가 구간 $[0, 1]$에서 적분 불가능함을 보이시오.

미적분학의 기본정리

앞 단원에서 정적분의 개념과 기본 성질을 살펴보았다. 또한 구분구적법을 사용하여 간단한 함수의 정적분을 계산하였다. 하지만 정적분을 계산할 때마다 이와 같은 방법을 사용하려면 무척 번거롭다. 도함수를 구할 때 미분의 정의를 사용하기보다는 미분 공식을 사용하는 것이 편리한 것처럼, 정적분을 계산할 때에도 계산 공식이 있으면 편리할 것이다.

이 단원에서는 정적분을 계산하는 방법인 미적분학의 기본정리를 살펴보자.

1 미적분학의 기본정리

실수 전체 구간에서 $f(x)=x^2$이라고 정의된 함수 f를 생각하자. 그리고 $0<a<b$인 실수 a, b를 생각하자. 구분구적법을 사용하여 구간 $[0,\ a]$에서 f의 정적분을 계산하면 다음과 같다.

$$\int_0^a x^2\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{ak}{n}\right)^2\frac{a}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\lim_{n\to\infty}\frac{a^3}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{a^3}{3},$$

마찬가지로 구간 $[0,\ b]$에서 f의 정적분은 다음과 같다.

$$\int_0^b x^2\,dx=\frac{b^3}{3}.$$

그러므로 $[a,\ b]$에서 $f(x)=x^2$의 정적분은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\int_a^b x^2\,dx=\int_0^b x^2\,dx-\int_0^a x^2\,dx=\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}.$$

그런데

$$F(x)=\frac{x^3}{3}$$

이라고 하면 $F'(x)=f(x)$이므로 F는 f의 역도함수이고

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

가 성립한다. 즉 F가 f의 역도함수일 때, 구간 $[a,\ b]$에서 f의 정적분은 F에 구간의 끝점을 대입한 뒤 뺀 값과 같다.

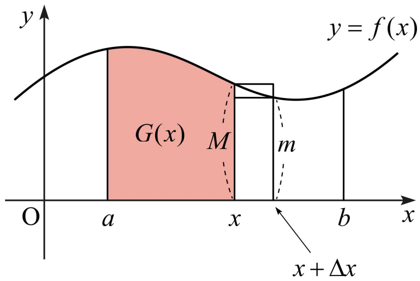
이제 f가 연속인 함수이고 $F'=f$일 때 이와 같은 등식이 항상 성립함을 증명해 보자.

$[a,\ b]$가 길이가 양수인 구간이고 f가 $[a,\ b]$에서 연속인 함수라고 하자. $a\le x\le b$일 때

$$G(x)=\int_a^x f(t)dt$$

라고 정의하자. 우리의 첫 번째 목표는 G가 f의 역도함수라는 사실 즉 $G'=f$를 보이는 것이다.

$a \le x < b$라고 하자. 그리고 Δx가 $x+\Delta x \le b$를 만족시킬 만큼 작은 양수라고 하자. f가 연속함수이므로 닫힌구간 $[x,\ x+\Delta x]$에서 f는 최댓값과 최솟값을 가진다. $[x,\ x+\Delta x]$에서 f의 최댓값을 M이라 하고, $[x,\ x+\Delta x]$에서 f의 최솟값을 m이라고 하자.



그러면 다음이 성립한다.

$$m\Delta x \le G(x+\Delta x)-G(x) \le M\Delta x$$

각 변을 Δx로 나누면

$$m \le \frac{G(x+\Delta x)-G(x)}{\Delta x} \le M$$

을 얻는다. 그런데 m과 M은 $[x,\ x+\Delta x]$에서 각각 f의 최솟값과 최댓값이므로, $f(c_1)=m$, $f(c_2)=M$인 점 c_1, c_2가 구간 $[x,\ x+\Delta x]$에 존재한다. 즉

$$f(c_1) \le \frac{G(x+\Delta x)-G(x)}{\Delta x} \le f(c_2)$$

이다. c_1과 c_2가 구간 $[x,\ x+\Delta x]$에 속하는 점이므로, $\Delta x \to 0+$일 때 $c_1 \to x$이고 $c_2 \to x$이다. 그런데 f가 연속함수이므로 $f(c_1) \to f(x)$이고 $f(c_2) \to f(x)$이다. 그러므로 위 부등식에 $\Delta x \to 0+$인 극한을 취하면

$$f(x) \le \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{G(x+\Delta x)-G(x)}{\Delta x} \le f(x) \qquad \cdots ㉠$$

가 성립한다.

같은 방법으로, $a < x \le b$일 때

$$f(x) \le \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{G(x+\Delta x)-G(x)}{\Delta x} \le f(x) \qquad \cdots ㉡$$

임을 보일 수 있다. 그러므로 ㉠과 ㉡을 결합하면 구간 $[a,\ b]$의 임의의 점 x에 대하여

$$G'(x) = f(x)$$

를 얻는다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

정리 1. 함수 f가 길이가 양수인 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이라고 하자. 만약

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

라고 하면, $[a,\ b]$의 임의의 점 x에 대하여 $G'(x) = f(x)$이다.

함수 f와 G가 앞에서 정의한 것과 같은 함수라고 하자. 그리고 $[a,\ b]$에서 f의 한 역도함수를 F라고 하자. 그러면 $[a,\ b]$의 임의의 점 x에 대하여

$$F'(x)=f(x)=G'(x)$$

이므로 F와 G는 상수 차이이다. 즉 상수 C가 존재하여 $[a,\ b]$의 임의의 x에 대하여

$$G(x)=F(x)+C \qquad \cdots ㉢$$

를 만족시킨다. 그런데

$$G(a)=\int_a^a f(t)dt=0$$

이므로 ㉢에 $x=a$를 대입하면 $0=F(a)+C$ 즉 $C=-F(a)$를 얻는다. 이 값을 ㉢에 대입하면

$$G(x)=F(x)-F(a) \qquad \cdots ㉣$$

이다. 한편

$$G(b)=\int_a^b f(t)dt$$

이므로 ㉣에 $x=b$를 대입하면

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$$

이다. 여기서 적분변수 t를 x로 바꾸어도 같은 적분을 나타내므로, 다음 정리를 얻는다.

정리 2. 함수 f가 길이가 양수인 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, F가 $[a,\ b]$에서 f의 한 역도함수라고 하자. 그러면

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

가 성립한다. 이 정리를 **미적분학의 기본정리**(fundamental theorem of calculus)라고 부른다.[48)]

미적분학의 기본정리에서 $F(b)-F(a)$를 다음과 같이 나타내기도 한다.

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b \qquad \cdots ㉤$$

또는

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b. \qquad \cdots ㉥$$

㉤은 $F(x)$의 항이 하나일 때 주로 사용하고, ㉥은 $F(x)$의 항이 두 개 이상일 때 주로 사용한다.

48) 정리 1을 '제 1 기본정리'라고 부르고, 정리 2를 '제 2 기본정리'라고 부르기도 한다.

보기 1. 미적분학의 기본정리를 사용하여 다음 정적분을 구해 보자.

$$\int_0^1 x\,dx$$

$f(x)=x$, $F(x)=\frac{1}{2}x^2$이라고 하면 $F'=f$이다. 그러므로

$$\int_0^1 x\,dx=\int_0^1 f(x)dx=F(1)-F(0)=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}.$$

보기 2. 미적분학의 기본정리를 사용하여 다음 정적분을 구해 보자.

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

$g(x)=x^2$, $G(x)=\frac{1}{3}x^3$이라고 하면 $G'=g$이다. 그러므로

$$\int_0^1 x^2\,dx=\int_0^1 g(x)\,dx=G(1)-G(0)=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}.$$

역도함수를 구하는 연산은 미분의 역연산이므로, 역도함수와 정적분은 본래 서로 무관한 개념이다. 역도함수를 사용하여 정적분을 계산할 수 있다는 점은 대단히 놀라운 일이다.

참고 정리 2에서 f의 역도함수 F 중 어느 것을 택하여도 같은 결과를 얻는다. 예컨대 F_1이 f의 또 다른 역도함수라고 하자. 그러면 $F(x)=F_1(x)+C_1$인 상수 C_1이 존재한다. 이때

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=(F_1(b)+C_1)-(F_1(a)+C_1)=F_1(b)-F_1(a).$$

이므로 F 대신 F_1을 사용하여 계산한 결과 또한 유효하다. □

이번에는 도함수를 적분할 때의 공식을 살펴보자.

함수 f가 $[a, b]$에서 미분 가능하고 f'이 $[a, b]$에서 적분 가능하다고 하자. 그리고

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

인 $(n+1)$개의 점 x_i를 생각하자. 평균값 정리에 의하여 x_{i-1}과 x_i 사이에 점 c_i가 존재하여

$$f'(c_i)=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}$$

을 만족시킨다. 우변의 분모는 Δx_i와 같으므로, 위 식으로부터 다음 식을 얻는다.

$$f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(c_i)\Delta x_i$$

이 등식의 양변을 $i=1$일 때부터 $i=n$일 때까지 더하면 다음 식을 얻는다.

$$f(b)-f(a)=\sum_{i=1}^{n} f'(c_i)\Delta x_i$$

여기서 x_i에 의하여 쪼개진 소구간의 길이가 0에 수렴하는 극한을 취하면 위 등식의 우변은 $[a, b]$에서 f'의 정적분이 된다.

이로써 다음 정리를 얻는다.

정리 3. 함수 f가 길이가 양수인 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 미분 가능하고 f'이 $[a,\ b]$에서 적분 가능하다고 하자. 그러면

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

가 성립한다. 이 공식을 **순변화량 정리**(the net change theorem)라고 부른다.

정리 2는 피적분함수 f가 연속일 때만 쓸 수 있지만 **정리 3**은 피적분함수 f'이 연속이 아닐 때도 쓸 수 있다.

보기 3. 함수 f를

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

이라고 정의하면

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

이다. f'이 $[0,\ 1]$에서 연속은 아니지만 0에서만 불연속이고 $[0,\ 1]$에서 유계이므로 f'은 $[0,\ 1]$에서 적분 가능하다.

그러므로 $[0,\ 1]$에서 f'의 정적분은 다음과 같다.

$$\int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0) = \sin 1.$$

참고 함수 f가 $[a,\ b]$에서 미분 가능하더라도 도함수 f'은 $[a,\ b]$에서 적분 가능하지 않을 수 있다. 예컨대 구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 f를

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x^3} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

이라고 정의하면

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{3}{x^3}\cos\dfrac{1}{x^3} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

이므로 f'은 0 근처에서 유계가 아니다. 그러므로 f'은 $[-1,\ 1]$에서 적분 불가능하다.

따라서 **정리 3**에서 f'이 적분 가능하다는 조건은 완화될 수 없다. □

2 부분적분법

미적분학의 기본정리는 미분연산을 반대로 함으로써 정적분을 계산할 수 있게 해준다. 그러므로 함수의 미분법으로부터 여러 가지 적분 공식을 끌어낼 수 있다.

함수 f와 g가 미분 가능한 함수일 때 곱의 미분법에 의하여 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

이 식을 변형하면

$$f(x)g'(x) = \frac{d}{dx}(f(x)g(x)) - f'(x)g(x)$$

이므로, 양변의 역도함수를 구하면

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

이다. 그러므로 다음 정리를 얻는다.

정리 4. 함수 f와 g가 구간 $[a, b]$에서 미분 가능하고 f'과 g'이 $[a, b]$에서 적분 가능하면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

이 공식을 **부분적분법**(integration by parts)이라고 부른다.

보기 4. 다음 정적분을 구해 보자.

$$\int_1^e \ln x\, dx$$

$f(x) = \ln x$, $g(x) = x$라고 하자. 그러면 $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $g'(x) = 1$이다.

$$f(x)g'(x) = \frac{d}{dx}(f(x)g(x)) - f'(x)g(x)$$

이므로

$$\ln x = \frac{d}{dx}(\ln x \times x) - \frac{1}{x} \times x$$

이며, 양변의 부정적분을 구하면

$$\int \ln x\, dx = x\ln x - x + C$$

이다. 그러므로 다음 결과를 얻는다.

$$\int_1^e \ln x\, dx = \Big[x\ln x - x\Big]_1^e = (e-e) - (0-1) = 1.$$

부분적분법을 부정적분으로 나타내면 다음과 같다.

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

여기서 $u = f(x)$, $v = g(x)$라고 하면

$$\frac{du}{dx} = f'(x), \quad \frac{dv}{dx} = g'(x)$$

이므로 형식적으로

$$du = f'(x)\,dx, \quad dv = g'(x)\,dx$$

로 나타낼 수 있다. 그러므로 부분적분법을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

보기 5. 다음 부정적분을 구해 보자.

$$\int xe^x\,dx$$

$u = x$, $dv = e^x\,dx$라고 하자. 그러면 $dv = v'(x)dx$, $dv = e^x\,dx$이므로 $v'(x) = e^x$이다. 따라서

$$v = \int e^x\,dx = e^x + C_1 \quad (C_1\text{은 상수})$$

이다. 가장 간단한 꼴인 $v = e^x$를 택하자.

$du = dx$이므로 부분적분법

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

를 사용하면 다음을 얻는다.

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C \quad (C\text{는 상수}).$$

3 치환적분법

함수 F와 g가 미분 가능한 함수이고, 구간 $[a, b]$에서 $F' = f$가 성립한다고 하자. 연쇄법칙에 의하여

$$\frac{d}{dt}F(g(t)) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$$

이므로

$$\int f(g(t))g'(t)\,dt = F(x) + C \quad (C\text{는 상수})$$

이다. 그런데

$$F(x) + C = \int f(x)dx$$

이므로

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

를 얻는다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

정리 5. 함수 f가 연속이고 함수 g가 미분 가능하며 g'이 적분 가능할 때 다음이 성립한다.

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

이 공식을 부정적분의 **치환적분법**(integration by substitution)이라고 부른다.

보기 6. 다음 부정적분을 구해 보자.

$$\int t(t^2+3)^4 dt$$

$f(x)=x^4$, $g(t)=t^2+3$이라고 하면 $f(g(t))=(t^2+3)^4$이고 $g'(t)=2t$이므로 치환적분법에 의하여 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\int t(t^2+3)^4 dt &= \frac{1}{2}\int f(g(t))g'(t)dt = \frac{1}{2}\int f(x)dx \\ &= \frac{1}{2}\int x^4 dx = \frac{1}{10}x^5 + C = \frac{1}{10}(t^2+3)^5 + C.\end{aligned}$$

보기 7. 다음 부정적분을 구해 보자.

$$\int \tan t\,dt$$

$x=\cos t$라고 하면 $dx=-\sin t\,dt$이다. x의 범위가 한 구간 안에 있을 때

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

이므로 $\cos t$의 부호가 바뀌지 않는 t의 범위에서 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\int \tan t\,dt &= -\int \frac{1}{\cos t}(-\sin t)dt = -\int \frac{1}{x}dx \\ &= -\ln|x| + C = -\ln|\cos t| + C.\end{aligned}$$

보기 8. 다음 부정적분을 구해 보자.

$$\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx$$

$u=\cos x$라고 하면 $du = -\sin x$이므로 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x\,dx \\ &= \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x \sin x\,dx \\ &= -\int (1-u^2)u^2\,du = \int (u^4-u^2)du \\ &= \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{3}u^3 + C \\ &= \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C.\end{aligned}$$

보기 9. $-2<x<2$일 때, 다음 부정적분을 구해 보자.

$$\int \frac{1}{x^2-4}dx$$

피적분함수의 식을 변형하면

$$\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{(x+2)(x-2)}=\frac{1}{4(x-2)}-\frac{1}{4(x+2)}$$

이므로 다음을 얻는다.

$$\int \frac{1}{x^2-4}dx=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\frac{1}{4}(\ln|x-2|-\ln|x+2|)+C.$$

치환적분법을 사용하여 정적분을 구할 때는 적분의 범위에 유의해야 한다.

부정적분의 치환적분법 공식

$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$$

에서 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$라고 하면

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(g(\beta))-G(g(\alpha))=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

이므로 다음 정리를 얻는다.

정리 6. 함수 f가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, 함수 g가 미분 가능하며 g'이 적분 가능하다고 하자. $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$이고 g'이 α, β를 모두 원소로 갖는 구간에서 연속이면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

이 공식을 정적분의 **치환적분법**이라고 부른다.

보기 10. 다음 정적분을 구해 보자.

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$$

$2x+1=t$ 즉 $x=\dfrac{t-1}{2}$로 두면 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2}$이다.

$x=0$일 때 $t=1$이고, $x=4$일 때 $t=9$이므로 다음을 얻는다.

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx=\int_1^9 \sqrt{t}\times\frac{1}{2}dt=\left[\frac{1}{3}t\sqrt{t}\right]_1^9=\frac{26}{3}$$

a가 상수일 때

$$x^2+a^2,\quad x^2-a^2,\quad a^2-x^2$$

꼴의 식을 포함하는 함수의 정적분은 적분변수를 삼각함수로 치환하면 편리하다.

보기 **11.** 다음 정적분을 구해 보자.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$x=\sin\theta,\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$로 두면 $\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta$이다.

$x=0$일 때 $\theta=0$이고, $x=\frac{1}{2}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$이므로 문제의 정적분을 계산하면 다음과 같다.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\times\cos\theta\, d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos\theta}\times\cos\theta\, d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}} 1\, d\theta=\frac{\pi}{6}.$$

다른 방법으로 구해 보자. $|x|<1$ 일 때

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

이므로 문제의 정적분은 다음과 같다.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sin^{-1}\frac{1}{2}-\sin^{-1}0=\frac{\pi}{6}.$$

보기 **12.** 다음 정적분을 구해 보자.

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}dx$$

$x=\tan\theta,\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$로 두면 $\frac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta$이다.

$x=0$일 때 $\theta=0$이고, $x=\sqrt{3}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{3}$이므로 문제의 정적분을 계산하면 다음과 같다.

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\times\sec^2\theta\, d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sec^2\theta}\times\sec^2\theta\, d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}} 1\, d\theta=\frac{\pi}{3}.$$

다른 방법으로 구해 보자.

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x=\frac{1}{x^2+1}$$

이므로 문제의 정적분은 다음과 같다.

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}dx=\tan^{-1}\sqrt{3}-\tan^{-1}0=\frac{\pi}{3}.$$

연습문제

개념에 익숙해지기 위한 문제

1. 다음 정적분을 구하시오.

(1) $\int_{-1}^{1} x\,dx$

(2) $\int_{0}^{1}\left(x+\frac{1}{2}\right)dx$

(3) $\int_{1}^{2} 5\,dx$

(4) $\int_{1}^{4} x^2\sqrt{x}\,dx$

(5) $\int_{1}^{4}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

(6) $\int_{0}^{1}(4x^3-1)dx$

(7) $\int_{0}^{1} 4e^{-3x}\,dx$

(8) $\int_{0}^{1} 2e^{2x}\,dx$

(9) $\int_{-1}^{1}\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx$

(10) $\int_{0}^{1}\sqrt{e^x}\,dx$

(11) $\int_{0}^{\ln 3} e^{-2t}dt$

(12) $\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{3}{e^{3t}}dt$

(13) $\int_{3}^{6} x^{-1}dx$

(14) $\int_{1}^{2}\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}+\frac{1}{2x^2}\right)dx$

(15) $\int_{-1}^{1}\frac{1-x-e^{-x}}{2}dx$

(16) $\int_{0}^{1}\left(e^{x/3}-\frac{2x}{5}\right)dx$

(17) $\int_{2}^{3}(5-2t)^4 dt$

(18) $\int_{4}^{9}\frac{3}{t-2}dt$

2. 다음 정적분을 구하시오.

(1) $\int_{-1}^{2}|x^2-1|dx$

(2) $\int_{0}^{2}|x-x^2|dx$

개념을 다지기 위한 문제

3. 함수 f가 실수 전체 구간에서 연속이고, a가 양의 실수라고 하자. 다음 물음에 답하시오.

(1) f가 기함수일 때, 즉 임의의 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킬 때 다음이 성립함을 보이시오.

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=0.$$

(2) f가 우함수일 때, 즉 임의의 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$를 만족시킬 때 다음이 성립함을 보이시오.

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

4. 함수 f가 실수 전체 구간에서 연속이고 a, b, c가 상수일 때, 다음이 성립함을 보이시오.

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx=\int_{a}^{b} f(x)dx.$$

5. 함수 f가 연속함수이고 a가 상수이며 임의의 실수 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$\int_a^x f(t)dt = 2x^2 - 8x + 6.$$

이때 $f(x)$와 a를 구하시오.

6. 함수 f가 $f(x) = x^2 + ax + b$라고 정의되어 있고 다음을 만족시킨다.

$$\int_0^3 f(x)dx = 3, \quad \int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{8}{3}.$$

이때 상수 a와 b의 값을 구하시오.

7. 다음 적분의 값이 최소가 되도록 하는 상수 a의 값을 구하시오.

$$\int_0^1 (9a^2x^2 - 12ax + 5)dx$$

8. 함수 f가 미분 가능하고, 임의의 실수 x에 대하여 다음을 만족시킨다.

$$\int_1^x (x-t)f(t)dt = 2x^3 + ax^2 - 4x + 3$$

이때 $f(2)$의 값을 구하시오.

9. f가 다항함수이고 임의의 실수 x에 대하여 다음을 만족시킨다.

$$f(x) = x^2 - 6x + 9\int_0^1 f(t)dt$$

이때 $f(x)$를 구하시오.

10. 함수 f가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때 다음을 만족시키는 c가 a와 b 사이에 존재함을 보이시오.

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$$

이 정리를 **적분의 제 1 평균값 정리**라고 부른다.

더 깊이 공부하고 싶은 사람을 위한 문제

11. 정적분을 정의하는 두 가지 방법을 조사하고, 두 방법의 차이를 비교해 보자.
    (1) 리만의 방법 (Riemann integral)
    (2) 다르부의 방법 (Darboux integral)

12. '적분의 제 2 평균값 정리'를 조사해 보자.

13. 정적분의 근삿값을 구하는 **중점 공식**(midpoint rule), **사다리꼴 공식**(trapzoidal rule), **심프슨 공식**(Simpson rule)을 조사해 보자.

수학을 사랑하는 사람을 위한 문제

1. 함수 f가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이라고 하자. 이때 $[a,\ b]$에서 f가 적분 가능함을 증명하시오. [구간 $[a,\ b]$에서 f가 균등연속이라는 사실을 이용한다.]

열네 번째 이야기

여러 가지 적분법

미적분학의 기본정리 덕분에 미분 공식으로부터 많은 함수의 적분 공식을 곧바로 끌어낼 수 있었다. 하지만 탄젠트나 코탄젠트와 같은 삼각함수, 분모의 차수가 높은 유리함수, 여러 함수의 곱으로 정의된 함수 등 미적분학의 기본정리를 곧바로 적용할 수 없는 함수들이 많이 남아 있다.

이 단원에서는 더 많은 함수의 적분을 계산할 수 있도록 다양한 적분법을 살펴보자.

1 지수함수와 로그함수의 적분

$a>0$, $a\neq 1$일 때 함수 $y=a^x$의 도함수가 $y'=a^x\ln a$이므로, 지수함수의 부정적분은 다음과 같다.

$$\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$$

로그함수의 부정적분을 구하기 위해서는 부분적분법을 사용해야 한다.

양수 x에 대하여 $f(x)=\ln x$, $g(x)=x$라고 하자. 그러면 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g'(x)=1$이다.

$$f(x)g'(x)=\frac{d}{dx}(f(x)g(x))-f'(x)g(x)$$

이므로

$$\ln x=\frac{d}{dx}(\ln x\times x)-\frac{1}{x}\times x$$

이며, 양변의 부정적분을 구하면 다음과 같다.

$$\int \ln x\,dx=x\ln x-x+C$$

특히 밑이 a인 로그함수의 부정적분은 다음과 같다.

$$\int \log_a x\,dx=\int\frac{\ln x}{\ln a}\,dx=\frac{x\ln x-x}{\ln a}+C$$

지금까지 살펴본 내용을 정리하면 다음과 같다.

정리 1. $a>0$, $a\neq 1$일 때 다음이 성립한다.

(1) $\displaystyle\int e^x\,dx=e^x+C$

(2) $\displaystyle\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$

(3) $\displaystyle\int \ln x\,dx=x\ln x-x+C$ (단, $x>0$)

(4) $\displaystyle\int \log_a x\,dx=\frac{x\ln x-x}{\ln a}+C$ (단, $x>0$)

2 삼각함수의 적분

여섯 개의 기본 삼각함수 중에서 미분 공식으로부터 곧바로 얻을 수 있는 부정적분 공식은 다음과 같다.

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C.$$

이제 다른 삼각함수의 부정적분 공식을 유도해 보자.

함수 f가 미분 가능하고 $f(x) \neq 0$일 때

$$\frac{d}{dx}\ln|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

이다. 그러므로 $f(x)$의 부호가 일정할 때 다음과 같은 적분 공식을 얻는다.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C \quad (C\text{는 적분상수}).$$

한편

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{-\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

이므로 탄젠트와 코탄젠트는 $f'(x)/f(x)$ 꼴로 나타낼 수 있다. 따라서 탄젠트와 코탄젠트의 부정적분은 다음과 같다.

$$\int \tan x\, dx = \int \left(-\frac{-\sin x}{\cos x}\right)dx = -\ln|\cos x| + C \quad (C\text{는 적분상수}),$$

$$\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \ln|\sin x| + C \quad (C\text{는 적분상수}).$$

다음으로 시컨트와 코시컨트의 부정적분을 구해 보자.

미분했을 때 시컨트가 되는 함수를 찾는 일은 쉽지 않다. 대신 미분했을 때 시컨트가 포함된 식이 나오는 함수를 찾으면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x,$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$$

두 등식을 변마다 더하면 다음을 얻는다.[49)]

$$\frac{d}{dx}(\sec x + \tan x) = \sec x(\sec x + \tan x)$$

그러므로 시컨트의 부정적분은 다음과 같다.

$$\int \sec x\, dx = \int \sec x \times \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}dx = \ln|\sec x + \tan x| + C \quad (C\text{는 적분상수})$$

49) 이와 같은 식을 찾아내기까지 수학자들은 적잖은 시행착오를 겪었을 것이다.

또한

$$\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x,$$
$$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$$

이므로

$$\frac{d}{dx}(\csc x + \cot x) = -\csc x\,(\csc x + \cot x)$$

이다. 그러므로

$$\int \csc x\,dx = \int \csc x \times \frac{\csc x + \cot x}{\csc x + \cot x}dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C \quad (C\text{는 적분상수})$$

이다.

지금까지 살펴본 내용을 정리하면 다음과 같다.

정리 2. 기본 삼각함수의 적분

(1) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

(2) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

(3) $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$

(4) $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

(5) $\int \csc x\,dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$

(6) $\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$

3 삼각함수의 곱의 적분

m과 n이 음이 아닌 정수일 때 다음과 같은 형태의 부정적분을 구해 보자.

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx$$

m과 n이 홀수인지 또는 짝수인지 여부에 따라 세 가지 유형으로 나누어 계산한다.

① m이 홀수인 경우, $m = 2k+1$로 두고 $\sin^2 x - 1 - \cos^2 x$를 사용하여

$$\sin^m x = \sin^{2k+1} x = (\sin^2 x)^k \sin x = (1-\cos^2 x)^k \sin x$$

로 나타낸다. 그 다음 $\sin x\,dx$를 $-d(\cos x)$로 바꾸어 계산한다.

② m이 짝수이고 n이 홀수인 경우, $n = 2k+1$로 두고 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$를 사용하여

$$\cos^n x = \cos^{2k+1} x = (\cos^2 x)^k \cos x = (1-\sin^2 x)^k \cos x$$

로 나타낸다. 그 다음 $\cos x\,dx$를 $d(\sin x)$로 바꾸어 계산한다.

③ m과 n이 모두 짝수인 경우, 삼각함수의 공식

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

를 사용하여 피적분함수를 $\cos 2x$에 관한 더 낮은 차수의 식으로 바꾼다.

보기 1. 다음 적분을 구해보자.

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$$

$m=3$이 홀수인 경우의 공식을 사용하자.

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x \, dx \\
&= \int (1-\cos^2 x) \times \cos^2 x \times (-d(\cos x)) && \because\ \sin x \, dx = -d(\cos x) \\
&= \int (1-u^2) \times u^2 (-du) && \because\ u = \cos x \text{로 치환} \\
&= \int (u^4 - u^2) du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C \\
&= \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C.
\end{aligned}$$

보기 2. 다음 적분을 구해보자.

$$\int \cos^5 x \, dx$$

$m=0$이 짝수, $n=5$가 홀수인 경우의 공식을 사용하자.

$$\begin{aligned}
\int \cos^5 x \, dx &= \int \cos^4 x \cos x \, dx \\
&= \int (1-\sin^2 x)^2 d(\sin x) && \because\ \cos x \, dx = d(\sin x) \\
&= \int (1-u^2)^2 du && \because\ u = \sin x \text{로 치환} \\
&= \int (1-2u^2+u^4) du \\
&= u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C \\
&= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C.
\end{aligned}$$

보기 3. 다음 적분을 구해보자.

$$\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$$

$m=2$와 $n=4$가 짝수인 경우의 공식을 사용하자.

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)(1+2\cos 2x+\cos^2 2x) dx \\
&= \frac{1}{8}\int (1+\cos 2x-\cos^2 2x-\cos^3 2x) dx \\
&= \frac{1}{8}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x-\int (\cos^2 2x+\cos^3 2x) dx\right].
\end{aligned}$$

여기서

$$\int \cos^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C_1,$$
$$\int \cos^3 2x\,dx = \frac{1}{2}\left(\sin 2x-\frac{1}{3}\sin^3 2x\right)+C_2$$

이므로 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx &= \frac{1}{8}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x-\int(\cos^2 2x+\cos^3 2x)dx\right]\\ &= \frac{1}{16}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{3}\sin^3 2x\right)+C.\end{aligned}$$

m과 n이 0 이상인 정수일 때 다음과 같은 형태의 부정적분을 살펴보자.

$$\int \sin mx\sin nx\,dx,\quad \int \sin mx\cos nx\,dx,\quad \int \cos mx\cos nx\,dx$$

이와 같은 부정적분은 다음 공식을 사용하여 변형한 뒤 계산한다.

$$\sin mx\sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x],$$
$$\sin mx\cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m-n)x+\sin(m+n)x],$$
$$\cos mx\cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x].$$

보기 4. 다음 적분을 구해보자.

$$\int \sin 3x\cos 5x\,dx$$

삼각함수의 공식을 사용하여 변형하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\int \sin 3x\cos 5x\,dx &= \frac{1}{2}\int[\sin(-2x)+\sin 8x]dx\\ &= \frac{1}{2}\int(\sin 8x-\sin 2x)dx\\ &= -\frac{\cos 8x}{16}+\frac{\cos 2x}{4}+C.\end{aligned}$$

4 유리함수의 적분

분자와 분모가 다항식인 분수식으로 표현되는 함수를 유리함수라고 부른다. 즉 $P(x)$와 $Q(x)$가 x에 대한 다항식이고

$$y=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

일 때 y를 x에 대한 유리함수라고 부른다. 이 함수의 정의역은 $Q(x)\neq 0$인 모든 x의 집합이다.

유리함수의 분모가 차수가 2 이하인 다항식들의 곱으로 인수분해되면 부분분수를 사용하여 변형한 뒤 적분할 수 있다. 이때 자주 사용되는 공식은 다음과 같다.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C, \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + C.$$

즉 유리식의 분모의 차수가 분자의 차수보다 1만큼 크면 자연로그를 사용하고, 분모의 차수가 분자의 차수보다 2만큼 크면 역탄젠트를 사용하여 부정적분을 구한다.

보기 5. 다음 적분을 구해보자.

$$\int \frac{6x+7}{(x+2)^2} dx$$

먼저 피적분함수를 부분분수로 바꾸자.

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2}$$

이 식은 x에 대한 항등식이다. 양변에 $(x+2)^2$을 곱한 뒤 계수를 비교하면 $A=6$, $B=-5$를 얻는다. 그러므로

$$\int \frac{6x+7}{(x+2)^2} dx = \int \frac{6}{x+2} dx - \int \frac{5}{(x+2)^2} dx = 6\ln|x+2| + \frac{5}{x+2} + C.$$

여기서 C는 적분상수이다.

보기 6. 다음 적분을 구해보자.

$$\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} dx$$

먼저 피적분함수를 부분분수로 바꾸자.

$$\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}$$

이 식은 x에 대한 항등식이다. 양변에 $(x^2+1)(x-1)^2$을 곱한 뒤 계수를 비교하면

$$A=2, \quad B=1, \quad C=-2, \quad D=1$$

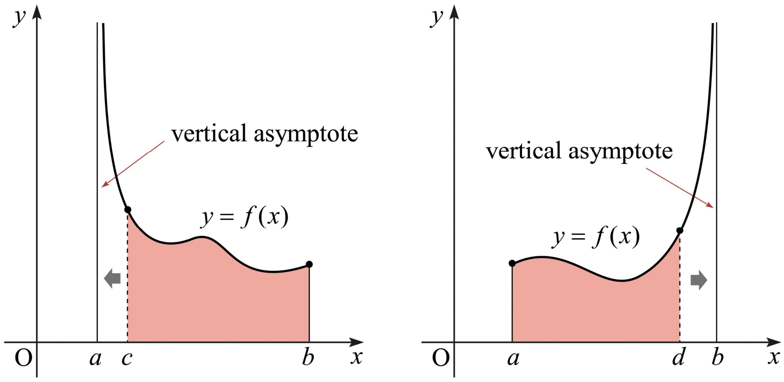
을 얻는다. 그러므로

$$\begin{aligned}\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} dx &= \int \left(\frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx \\ &= \int \left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx \\ &= \ln(x^2+1) + \tan^{-1} x - 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + K.\end{aligned}$$

여기서 K는 적분상수이다.

5 이상적분

정적분의 정의에 의하면 적분 구간의 길이가 유한이고 피적분함수가 유계일 때만 적분이 정의된다. 그러나 적분의 개념을 확장하여 적분 구간의 길이가 무한이거나 함수가 유계가 아닌 경우의 적분을 정의할 수 있다.



- 길이가 양수인 반열린구간 $(a, b]$를 생각하자. 함수 f가 $(a, b]$에서 정의되어 있고, $a < c < b$인 임의의 c에 대하여 $[c, b]$에서 f가 적분 가능하다고 하자. 이때 $(a, b]$에서 f의 **이상적분**(improper integral)을 다음과 같이 정의한다.[50]

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a+} \int_c^b f(x)dx.$$

여기서 c를 이 이상적분의 **특이점**(singularity)이라고 부른다.

- 함수 f가 $[a, b)$에서 정의되어 있는 경우, $[a, b)$에서 f의 **이상적분**도 다음과 같이 비슷한 방법으로 정의한다.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d \to b-} \int_a^d f(x)dx.$$

여기서 d를 이 이상적분의 **특이점**이라고 부른다.

- 만약 함수 f가 $[a, c) \cup (c, b]$에서 정의되어 있다면, $[a, c) \cup (c, b]$에서 f의 **이상적분**을 다음과 같이 두 이상적분의 합으로 정의한다.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad \cdots ㉠$$

여기서 c를 이 이상적분의 **특이점**이라고 부른다.

이상적분의 정의에서 극한이 수렴할 수도 있고 발산할 수도 있다. 이상적분을 정의하는 극한이 수렴하는 경우 "이상적분이 수렴한다."라고 말하며, 이상적분을 정의하는 극한이 발산하는 경우 "이상적분이 발산한다."라고 말한다.

특히 ㉠에서는 우변의 두 이상적분이 모두 수렴할 때 좌변의 이상적분이 수렴하는 것으로 정의한다.

---

50) 이상적분은 정적분이 아니지만 정적분의 개념을 확장한 것이므로 '적분'이라는 이름이 붙는다.

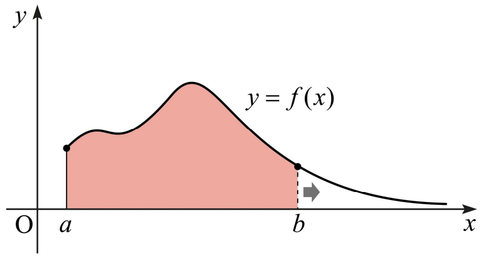
보기 7. 유계가 아닌 함수의 이상적분을 계산하는 예를 살펴보자.

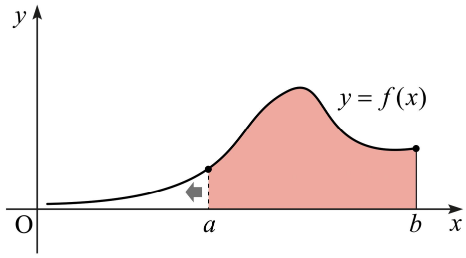
(1) $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to 0+}\int_c^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to 0+}(-\ln c) = \infty.$

(2) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c\to 0+}\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c\to 0+}(2-2\sqrt{x}) = 2.$

(3) $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c\to 0+}\int_c^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c\to 0+}\left(\frac{1}{c}-1\right) = \infty.$

이번에는 길이가 무한인 구간에서의 이상적분을 살펴보자.





• 함수 f가 $[a, \infty)$에서 정의되어 있고, $a < b$인 임의의 b에 대하여 $[a, b]$에서 f가 적분 가능하다고 하자. 이때 $[a, \infty)$에서 f의 **이상적분**을 다음과 같이 정의한다.

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

• 함수 f가 $(-\infty, b]$에서 정의되어 있는 경우 $(-\infty, b]$에서 f의 **이상적분**도 다음과 같이 비슷한 방법으로 정의한다.

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

• 만약 함수 f가 $(-\infty, \infty)$에서 정의되어 있고 유계인 임의의 닫힌구간에서 f가 적분 가능하다면, 적당한 점 c를 하나 잡은 뒤 $(-\infty, \infty)$에서 f의 **이상적분**을 다음과 같이 정의한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)\,dx.$$

여기서 우변의 두 이상적분이 모두 수렴하도록 하는 c가 존재한다면, c를 어느 값으로 택하든 상관없이 우변의 두 이상적분이 항상 수렴한다.

보기 8. 유계가 아닌 구간에서 이상적분을 계산하는 예를 살펴보자.

(1) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\ln b = \infty.$

(2) $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to\infty}(2\sqrt{b}-2) = \infty.$

(3) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right) = 1.$

보기 9. 다양한 형태의 이상적분을 계산하는 예를 살펴보자.

(1) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+4}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+4}\,dx$$
$$= \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{x^2+4}\,dx + \lim_{b \to \infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{x^2+4}\,dx$$
$$= \lim_{a \to -\infty} \left(-\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{a}{2}\right) + \lim_{b \to \infty} \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{b}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

(2) $$\int_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \lim_{c \to 3^-} \int_{0}^{c} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \lim_{c \to 3^-} \sin^{-1}\frac{c}{3} = \sin^{-1}1 = \frac{\pi}{2}.$$

연습문제

개념에 익숙해지기 위한 문제

1. 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\displaystyle\int \frac{(2\sqrt{x}-1)^2}{x}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int (e^{3x} - 3^x)\,dx$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{2+3x}\,dx$　　(4) $\displaystyle\int (x+1)e^x\,dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$　　(6) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\,dx$　　(8) $\displaystyle\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\,dx$

2. 다음 정적분을 구하시오.

(1) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 x + \csc^2 x)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{0}^{1} e^{-2x+1}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} x\cos 3x\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_{2}^{3} x\sqrt{x-2}\,dx$

(5) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx$　　(6) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

(7) $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{4}{x^2+9}\,dx$

3. 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\displaystyle\int e^{2x}\sin 3x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int x^3 \ln x\,dx$

(3) $\displaystyle\int (\ln x)^3\,dx$　　(4) $\displaystyle\int x^2 e^{3x}\,dx$

4. 다음 이상적분이 수렴하는지 판별하고, 수렴한다면 적분값을 구하시오.

(1) $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx$ (2) $\int_1^\infty \frac{2}{x^{3/2}}dx$

(3) $\int_0^\infty \frac{1}{(2x+3)^2}dx$ (4) $\int_0^\infty e^{-3x}dx$

(5) $\int_0^\infty e^{2x}dx$ (6) $\int_0^\infty (x^2+1)dx$

(7) $\int_2^\infty \frac{1}{(x-1)^{5/2}}dx$ (8) $\int_2^\infty e^{2-x}dx$

(9) $\int_0^\infty 0.01e^{-0.01x}dx$ (10) $\int_0^\infty \frac{4}{(2x+1)^3}dx$

(11) $\int_0^\infty 6e^{1-3x}dx$ (12) $\int_1^\infty e^{-0.2x}dx$

개념을 다지기 위한 문제

5. 다음 등식에서 C가 적분상수일 때, 상수 a와 b의 값을 구하시오.

$$\int e^{2x}\sin x\,dx = e^{2x}(a\sin x + b\cos x) + C$$

6. 함수 f가 미분 가능하고, 임의의 실수 x에 대하여

$$f(x) > 0,\quad \frac{f'(x)}{f(x)} = -2$$

를 만족시키며 $f(0) = \frac{1}{e}$이다. 이때 $f(x)$를 구하시오.

7. 다음 이상적분이 수렴하는지 판별하고, 수렴한다면 적분값을 구하시오.

(1) $\int_3^\infty \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}dx$ (2) $\int_2^\infty \frac{1}{x\ln x}dx$

(3) $\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$ (4) $\int_0^\infty \frac{x}{x^2+1}dx$

(5) $\int_0^\infty 2x(x^2+1)^{-3/2}dx$ (6) $\int_1^\infty (5x+1)^{-4}dx$

(7) $\int_{-\infty}^0 e^{4x}dx$ (8) $\int_{-\infty}^0 \frac{8}{(x-5)^2}dx$

(9) $\int_{-\infty}^0 \frac{6}{(1-3x)^2}dx$ (10) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{4-x}}dx$

(11) $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{(e^{-x}+2)^2}dx$ (12) $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-x}}{(e^{-x}+2)^2}dx$

8. $0 < a < b$이고 함수 f가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이라고 하자. 또한 f가 $[a,\ b]$에서 순증가하며 $f(a) > 0$이라고 하자. $f(a) = c,\ f(b) = d$일 때 등식

$$\int_c^d f^{-1}(y)\,dy = bd - ac - \int_a^b f(x)\,dx$$

가 성립함을 함수 f의 그래프를 사용하여 설명하시오.

9. 앞의 문제의 결과와 지수함수의 적분을 사용하여, $d > 1$일 때 다음 등식이 성립함을 설명하시오.

$$\int_1^d \ln x\, dx = d\ln d - d + 1.$$

10. 이상적분 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$가 수렴하면, 임의의 점 c에 대하여 다음이 성립함을 보이시오.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx.$$

실력을 향상시키기 위한 문제

11. k가 양수일 때 다음을 보이시오.

(1) $\int_0^{\infty} ke^{-kx}dx = 1$

(2) $\int_1^{\infty} \frac{k}{x^{k+1}}dx = 1$

(3) $\int_e^{\infty} \frac{k}{x(\ln x)^{k+1}}dx = 1$

12. 함수 f와 g가 $[a,\ \infty)$에서 정의되어 있고, $x \geq a$인 모든 x에 대하여 $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$이라고 하자. 또한 $a < b$인 임의의 실수 b에 대하여, f와 g가 $[a,\ b]$에서 적분 가능하다고 하자. 다음을 보이시오.

(1) $\phi(x) = \int_a^x f(t)dt$라고 정의된 함수 ϕ가 $[a,\ \infty)$에서 유계이면 이상적분 $\int_a^{\infty} f(x)dx$가 수렴한다.

(2) $x \geq a$인 임의의 x에 대하여 $f(x) \leq g(x)$이고 이상적분 $\int_a^{\infty} g(x)dx$가 수렴하면 이상적분 $\int_a^{\infty} f(x)dx$도 수렴한다. 이 정리를 **비교 판정법**(direct comparison test)이라고 부른다.

(3) $x \to \infty$일 때 $f(x)/g(x)$가 양수 L에 수렴한다고 하자. 이때 이상적분 $\int_a^{\infty} f(x)dx$가 수렴하기 위한 필요충분조건은 $\int_a^{\infty} g(x)dx$가 수렴하는 것이다.
이 정리를 **극한비교 판정법**(limit comparison test)이라고부른다.

13. 위 문제 12를 적분 구간의 끝점에서 특이점을 갖는 이상적분에 대한 판정법으로 변형하고, 이를 증명하시오.

14. n이 자연수일 때 다음 부정적분을 구하시오.

$$\int x^n e^x\, dx$$

15. n이 자연수일 때 다음 부정적분을 구하시오.

$$\int x^n \ln x\, dx$$

16. 쌍곡선함수와 역쌍곡선함수의 부정적분 공식을 조사해 보자.

17. 치환적분법 중 하나인 바이어슈트라스 치환(Weierstrass substitution)을 조사해 보자.

수학을 사랑하는 사람을 위한 문제

1. 구간 $[a,\ b]$에서 적분 가능한 함수들의 모임을 $R[a,\ b]$와 같이 나타낸다. 실수 k와 적분 가능한 함수 f, g에 대하여 통상적인 실수배 kf와 함수의 합 $f+g$가 정의되어 있다고 하자.

   (1) $R[a,\ b]$가 $\mathbb{R}$에서 벡터공간임을 보이시오.

   (2) $\phi(f)=\int_a^b f(x)dx$일 때, ϕ가 $R[a,\ b]$로부터 $\mathbb{R}$로의 선형변환임을 보이시오.

2. 원주율 π가 무리수임을 보이려고 한다. $\pi=a/b$이고 a와 b가 서로소인 자연수라고 가정하자. 함수 F와 f를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x)=\frac{x^n(a-bx)^n}{n!},$$
$$F(x)=f(x)-f''(x)+f^{(4)}(x)-f^{(6)}(x)+-\cdots+(-1)^n f^{(2n)}(x).$$

   다음 물음에 답하시오.

   (1) $F(0)+F(\pi)$가 자연수임을 보이시오.

   (2) 다음을 보이시오.

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx=F(0)+F(\pi).$$

   (3) n이 자연수일 때 다음이 성립함을 보이시오.

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx\le\pi\frac{(\pi a)^n}{n!}.$$

   (4) 위 (1)~(3)의 결과를 사용하여 모순을 유도하고, π가 무리수임을 보이시오.

3. 양수 x에 대하여 $\Gamma(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

   다음 물음에 답하시오.

   (1) 임의의 양수 x에 대하여 이상적분 $\Gamma(x)$가 수렴함을 보이시오.

   (2) 임의의 양수 x에 대하여 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$임을 보이시오.

   (3) $\Gamma(1)=1$임을 보이시오.

   (4) 0 이상인 정수 n에 대하여 $\Gamma(n+1)=n!$임을 보이시오.

   이와 같이 정의된 함수 Γ를 **감마 함수**(gamma function)라고 부른다. 감마 함수는 차례곱 $n!$의 정의역을 음의 정수가 아닌 아닌 실수 전체 집합으로 확장한 것이다.

4. $\{f_n\}$이 구간 $[a,\ b]$에서 적분 가능한 함수로 이루어진 함수열이고, f가 $\{f_n\}$의 극한함수라고 하자. 또한 $\{f_n\}$이 f에 균등수렴한다고 하자.

   (1) 함수 f가 구간 $[a,\ b]$에서 적분 가능함을 보이시오.

   (2) $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)dx$임을 보이시오.

열다섯 번째 이야기

정적분의 활용

미분을 활용하여 다양한 문제를 해결한 것처럼, 정적분을 활용하여 다양한 문제를 해결할 수 있다. 특히 평면도형의 넓이나 입체도형의 부피, 곡선의 길이와 관련된 문제는 정적분을 활용하여 해결할 수 있는 대표적인 유형이다.

이 단원에서는 정적분을 활용하여 문제를 해결하는 다양한 예를 살펴보자.

1 평면도형의 넓이

함수 $y=f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$

이다.

또 함수 $x=g(y)$가 닫힌구간 $[c,\ d]$에서 연속일 때, 곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

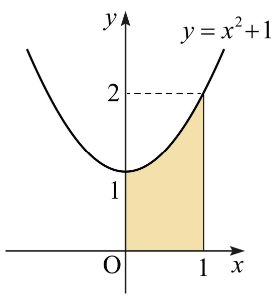
$$S=\int_c^d |g(y)|dy$$

이다.

보기 1. 좌표평면에서 곡선 $y=x^2+1$과 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구해 보자.

$0 \le x \le 1$일 때 $y>0$이므로 구하는 넓이 S는 다음과 같다.

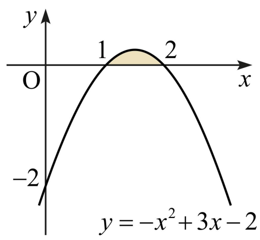
$$S=\int_0^1 (x^2+1)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{4}{3}.$$



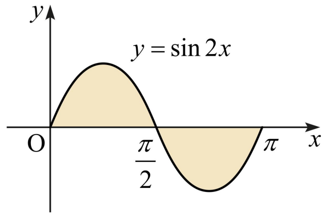
보기 2. 곡선 $y=-x^2+3x-2$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구해 보자.

곡선 $y=-x^2+3x-2$와 x축의 교점의 x좌표는 $x=1$, $x=2$이다.
$1 \le x \le 2$일 때 $y \ge 0$이므로 구하는 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\int_1^2 (-x^2+3x-2)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x\right]_1^2=\frac{1}{6}.$$



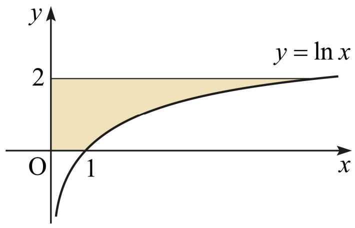
보기 **3.** 좌표평면에서 곡선 $y=\sin 2x$와 x축으로 둘러싸여 있고 $0 \le x \le \pi$의 범위에 놓인 도형의 넓이를 구해 보자.



$0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$일 때 $\sin 2x \ge 0$이고, $\dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi$일 때 $\sin 2x \le 0$이므로, 구하는 넓이 S는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi} |\sin 2x|\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\sin 2x)\, dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= 1+1=2. \end{aligned}$$

보기 **4.** 좌표평면에서 곡선 $y=\ln x$와 y축, 그리고 두 직선 $y=0$, $y=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구해 보자.



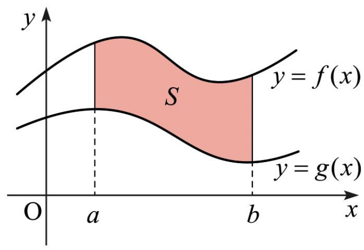
$y=\ln x$에서 $x=e^y$이므로 구하는 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\int_0^2 e^y\, dy = e^y \Big|_{y=0}^{y=2} = e^2-1.$$

두 함수 f, g가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\, dx$$

이다.

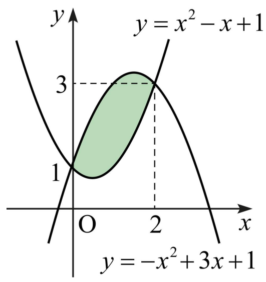


보기 **5.** 두 곡선 $y=x^2-x+1$과 $y=-x^2+3x+1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구해 보자.

두 곡선의 교점의 x좌표는 $x=0$, $x=2$이다. $0 \le x \le 2$일 때

$$x^2-x+1 \le -x^2+3x+1$$

이므로 구하는 넓이 S는 다음과 같다.



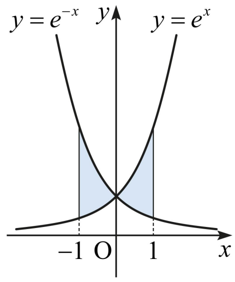
$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{(-x^2+3x+1)-(x^2-x+1)\}\, dx \\ &= \int_0^2 (-2x^2+4x)\, dx = \left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_0^2 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

보기 6. 두 곡선 $y=e^{x}$, $y=e^{-x}$와 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구해 보자.

두 곡선의 교점의 x좌표는 $x=0$이다.

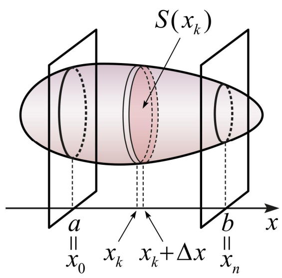
$-1 \leq x \leq 0$일 때 $e^{x} \leq e^{-x}$이고, $0 \leq x \leq 1$일 때

$e^{x} \geq e^{-x}$이므로 구하는 넓이는 다음과 같다.



$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-1}^{1} \left| e^{x} - e^{-x} \right| dx \\
&= \int_{-1}^{0} (e^{-x} - e^{x}) dx + \int_{0}^{1} (e^{x} - e^{-x}) dx \\
&= \left[-e^{x} - e^{x} \right]_{-1}^{0} + \left[e^{x} + e^{-x} \right]_{0}^{1} \\
&= \left(e + \frac{1}{e} - 2 \right) + \left(e + \frac{1}{e} - 2 \right) = 2e + \frac{2}{e} - 4.
\end{aligned}
$$

2 입체도형의 부피



오른쪽 그림과 같이 어떤 입체도형에 대하여 한 직선을 x축으로 정할 때, x좌표가 각각 a, b인 점을 지나고 x축에 수직인 두 평면 사이에 있는 부피를 구해 보자.

닫힌구간 $[a, b]$를 n등분하여 만들어지는 소구간들의 끝점을 차례로

$$a = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k,\ \cdots,\ x_n = b$$

라 하고, 각 구간의 길이를 Δx라고 하자.

또 x축에 수직이고 x좌표가 x_k인 점을 지나는 평면으로 입체도형을 자를 때 생기는 단면의 넓이를 $S(x_k)$라고 하면 이 단면을 밑면으로 하고 높이가 Δx인 기둥의 부피는 $S(x_k)\Delta x$이므로 이들 n개의 기둥의 부피의 합 V_n은 다음과 같다.

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} S(x_k) \Delta x$$

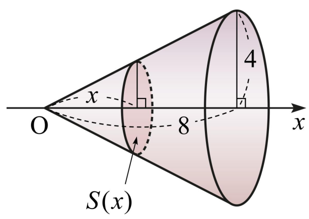
따라서 주어진 입체도형의 부피 V는 구분구적법에 의하여

$$V = \lim_{n \to \infty} V_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} S(x_k) \Delta x = \int_{a}^{b} S(x)\, dx$$

이다.

보기 7. 정적분을 사용하여 밑면의 반지름의 길이가 r이고 높이가 h인 원뿔의 부피를 구해 보자.

그림과 같이 원뿔의 꼭짓점을 원점 O에 두고, 꼭짓점에서 밑면에 내린 수선이 x축에 놓이도록 하자.



이때 x좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하면, 단면과 밑면의 반지름의 길이의 비가 $x : r$이므로 넓이의 비는

$$S(x) : \pi r^2 = x^2 : h^2$$

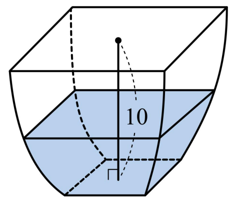
즉

$$S(x) = \frac{\pi r^2 x^2}{h^2}$$

이다. 따라서 구하는 부피 V는 다음과 같다.

$$V = \int_0^h S(x)\,dx = \int_0^h \frac{\pi r^2 x^2}{h^2}\,dx = \frac{\pi r^2}{3h^2}x^3 \Big|_{x=0}^{x=h} = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

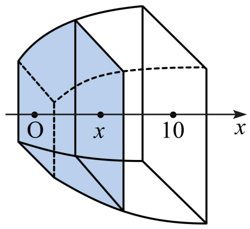
보기 8. 그림과 같이 높이가 10인 용기가 있다. 용기에 담긴 물의 높이가 x일 때, 수면은 한 변의 길이가 $\sqrt{3x+15}$인 정사각형이다. 이 용기에 담을 수 있는 물의 최대부피를 구해 보자.



두 번째 그림과 같이 밑면의 두 대각선의 교점을 원점 O에 두고, 그 점을 지나고 밑면에 수직인 직선이 x축이 되도록 두자. 이때 x좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라고하면

$$S(x) = 3x + 15$$

이다. 따라서 구하는 부피 V는 다음과 같다.



$$V = \int_0^{10} S(x)dx = \int_0^{10}(3x+15)dx = \left[\frac{3}{2}x^2 + 15x\right]_0^{10} = 300.$$

(이 보기는 비상교육 고등학교 미적분 교과서 3단원에서 발췌하였음.)

3 속도와 거리

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$일 때, 점 P의 위치 $x = f(t)$를 구해 보자. 시각 t_0에서 점 P의 위치를 $f(t_0) = x_0$이라고 하면 $v(t) = f'(t)$이므로

$$\int_{t_0}^t v(t)dt = f(t) - f(t_0) = f(t) - x_0$$

이다. 따라서 시각 t에서 점 P의 위치 x는 다음과 같다.

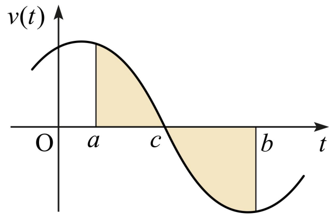
$$x = f(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t)dt.$$

또 시각 $t = a$에서 $t = b$까지점 P의 위치의 변화량은 다음과 같다.[51]

$$f(b) - f(a) = \int_a^b v(t)dt.$$

51) 13단원 정리 3을 '순변화량 정리'라고 부르는 이유가 이 공식 때문이다.

수직선 위를 움직이는 점 P가 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 움직인 거리를 구해 보자.



점 P의 시각 t에서 속도 $v(t)$를 나타내는 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $a \le t \le c$에서 $v(t) \ge 0$이므로 점 P가 움직인 거리는

$$f(c)-f(a)=\int_a^c v(t)dt$$

이다. 또 $c \le t \le b$에서 $v(t) \le 0$이므로 점 P가 움직인 거리는

$$f(c)-f(b)=\int_b^c v(t)dt$$

이다. 따라서 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\{f(c)-f(a)\}+\{f(c)-f(b)\} &= \int_a^c v(t)dt+\int_b^c v(t)dt \\ &= \int_a^c v(t)dt+\int_c^b \{-v(t)\}dt \\ &= \int_a^c |v(t)|dt+\int_c^b |v(t)|dt \\ &= \int_a^b |v(t)|dt.\end{aligned}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

직선 위를 움직이는 점의 위치와 움직인 거리

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서 속도가 $v(t)$이고, 시각 t_0에서 위치를 x_0이라고 할 때

- 시각 t에서 점 P의 위치 x는 다음과 같다.

$$x=x_0+\int_{t_0}^t v(t)dt$$

- 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량은 다음과 같다.

$$\int_a^b v(t)dt$$

- 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리는 다음과 같다.

$$\int_a^b |v(t)|dt$$

보기 **9.** 좌표가 1인 점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=4-2t$라고 한다. 이때 다음을 구해 보자.

(1) 시각 $t=3$에서 점 P의 위치

(2) 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량

(3) 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리

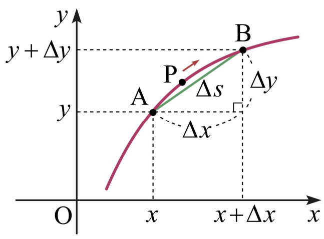
(1) $1+\int_0^3 (4-2t)dt = 1+\left[4t-t^2\right]_0^3 = 1+3=4.$

(2) $\int_1^3 (4-2t)dt = \left[4t-t^2\right]_1^3 = 0.$

(3) $1 \le t \le 2$에서 $v(t) \ge 0$이고 $2 \le t \le 3$에서 $v(t) \le 0$이므로, 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는 다음과 같다.

$$\int_1^2 (4-2t)dt + \int_2^3 (-4+2t)dt = 1+1=2.$$

좌표평면 위에서 점 P의 시각 t에서의 위치가 $(x,\ y)$이고, $x,\ y$가 시각 t의 함수일 때, $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s를 구해 보자.



점 P가 출발 후 시각 t까지 실제로 움직인 거리를 $s(t)$라고 하고, 시각 t에서 점 $\mathrm{A}(x,\ y)$에 있던 점 P가 시각 $t+\varDelta t$에서 점 $\mathrm{B}(x+\varDelta x,\ y+\varDelta y)$로 이동했다고 하자. 그러면 $\varDelta t$가 0에 가까울 때 움직인 거리 $s(t)$의 증분 $\varDelta s$는 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(\varDelta x)^2+(\varDelta y)^2}$에 가까우므로

$$\begin{aligned} s'(t) &= \lim_{\varDelta t\to 0}\frac{\varDelta x}{\varDelta t} \\ &= \lim_{\varDelta t\to 0}\frac{\sqrt{(\varDelta x)^2+(\varDelta y)^2}}{\varDelta t} \\ &= \lim_{\varDelta t\to 0}\sqrt{\left(\frac{\varDelta x}{\varDelta t}\right)^2+\left(\frac{\varDelta y}{\varDelta t}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \end{aligned}$$

이다. 즉 $s'(t)$는 점 P의 속력이다.

따라서 $s(t)$는 속력 $s'(t)$의 한 역도함수이므로 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=s(b)-s(a)=\int_a^b s'(t)dt=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

이다.

한편 $a \le x \le b$인 범위에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서 위치가 $(x,\ y)$일 때

$$x=t,\ \ y=f(t) \quad (a \le t \le b)$$

로 나타낸 곡선으로 볼 수 있다.

즉 $x=a$에서 $x=b$까지 곡선 $y=f(x)$의 길이 l은 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리와 같다. 따라서 곡선의 길이 l은

$$l=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

평면 운동에서 움직인 거리

- 평면에서 점 P의 시각 t에서의 위치가 $(x,\ y)$이고, $x,\ y$가 시각 t의 함수이며 t에 대하여 미분 가능할 때, $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는 다음과 같다.

$$s=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

- 함수 f가 미분 가능한 함수이고 도함수 f'이 연속함수일 때, $x=a$에서 $x=b$까지 곡선 $y=f(x)$의 길이 l은 다음과 같다.

$$l=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

보기 10. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서 위치가 $(x,\ y)$이고

$$x=\frac{1}{2}t^2-t,\quad y=\frac{4}{3}t\sqrt{t}$$

일 때, $t=0$에서 $t=1$까지 점 P가 움직인 거리를 구해 보자.

$$\frac{dx}{dt}=t-1,\quad \frac{dy}{dt}=2\sqrt{t}$$

이므로 점 P가 움직인 거리는 다음과 같다.

$$\int_0^1 \sqrt{(t-1)^2+(2\sqrt{t})^2}\,dt=\int_0^1 \sqrt{(t+1)^2}\,dt=\int_0^1 (t+1)dt=\frac{3}{2}.$$

보기 11. $x=0$에서 $x=5$까지의 곡선 $y=\frac{1}{3}x\sqrt{x}$의 길이를 구해 보자.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{x}}{2}$$

이므로 곡선의 길이는 다음과 같다.

$$\int_0^5 \sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2}\,dx=\int_0^5 \frac{\sqrt{4+x}}{2}dx=\left[\frac{1}{3}(4+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^5=\frac{19}{3}.$$

연습문제

평면도형의 넓이

1. $0\le x\le 1$의 범위에서 곡선 $y=x^3$과 직선 $y=2x$ 사이의 영역의 넓이를 구하시오.

2. 두 포물선 $y=x^2-1$과 $y=-(x^2-1)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

3. 포물선 $x=y^2$과 직선 $y=3x-2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

4. 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\cos 2x$와 두 직선 $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

5. $-2 \le x \le 2$의 범위에서 곡선 $y=x\sqrt{4-x^2}$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

6. $0 \le x \le \pi$의 범위에서 곡선 $y=(1-\cos x)\sin x$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

7. $0 \le x \le \pi$의 범위에서 곡선 $y=\cos^2 x$와 직선 $y=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

8. $0 \le y \le 1$의 범위에서 두 곡선 $x=12y^2-12y^3$과 $x=2y^2-2y$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

9. $0 \le y \le 1$의 범위에서 곡선 $4y=x^2$과 두 직선 $y=x$, $y=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

10. $-2 \le x \le 2$의 범위에서 두 곡선 $y=-x^2+3x$와 $y=2x^3-x^2-5x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

11. $a>0$, $b>0$이라고 하자. 이때 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

입체도형의 부피

1. 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=x$로 둘러싸인 영역을 R라고 하자.
   (1) x축을 축으로 R를 회전시켰을 때 만들어지는 회전체의 부피를 구하시오.
   (2) y축을 축으로 R를 회전시켰을 때 만들어지는 회전체의 부피를 구하시오.

2. $0 \le x \le 1$의 범위에서 포물선 $y=x^2$과 x축 사이의 영역을 R라고 하자.
   (1) x축을 축으로 R를 회전시켰을 때 만들어지는 회전체의 부피를 구하시오.
   (2) y축을 축으로 R를 회전시켰을 때 만들어지는 회전체의 부피를 구하시오.

3. $r>0$일 때 반원 $y=\sqrt{r^2-x^2}$과 x축 사이의 영역을 R라고 하자. x축을 축으로 R를 회전시켰을 때 만들어지는 회전체의 부피를 구하시오.

4. $r_1>r_2>0$이라고 하자. 원 $x^2+(y-r_1)^2=r_2^2$을 x축을 축으로 회전시켰을 때 만들어지는 회전체를 **원환면**(torus)이라고 부른다. 이 원환면으로 둘러싸인 영역의 부피를 구하시오.

5. 밑면의 반지름의 길이가 r이고 높이가 충분히 긴 두 원기둥이 겹쳐 있다. (단, 원기둥은 내부가 차 있는 것으로 생각한다.) 다음 물음에 답하시오.
   (1) 두 원기둥의 회전축이 수직으로 만날 때, 두 원기둥이 겹쳐 있는 부분의 부피를 구하시오.
   (2) 두 원기둥의 회전축이 만나는 각의 크기가 θ일 때, 두 원기둥이 겹쳐 있는 부분의 부피를 구하시오.

6. a, b, c가 양수라고 하자. 타원면 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$로 둘러싸인 부분의 부피를 구하시오.

속도와 거리

1. $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$의 범위에서 곡선 $y = \ln(1-x^2)$의 길이를 구하시오.

2. $2 \le x \le 8$의 범위에서 곡선 $y = \frac{1}{8}x^2 - \ln x$의 길이를 구하시오.

3. $1 \le x \le 2$의 범위에서 곡선 $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$의 길이를 구하시오.

4. r가 양수일 때, 매개변수 θ로 나타낸 함수
$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$
는 반지름이 r인 원이다. 적분을 사용하여 이 원의 둘레의 길이를 구하시오.

5. $0 \le t \le \pi$일 때, 매개변수 t로 나타낸 함수 $x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t$의 그래프의 길이를 구하시오.

6. $0 \le t \le 1$일 때, 매배변수 t로 나타낸 함수 $x = \frac{1}{2}\ln(1+t^2),\ y = \tan^{-1} t$의 그래프의 길이를 구하시오.

7. $0 \le \theta \le 2\pi$일 때, 매개변수 θ로 나타낸 함수 $x = 2\cos\theta + \cos 2\theta + 1,\ y = 2\sin\theta + \sin 2\theta$의 그래프의 길이를 구하시오.

8. $0 \le t \le 4$일 때, 매개변수 t로 나타낸 함수 $x = \frac{1}{2}t^2,\ y = \frac{1}{9}(6t+9)^{3/2}$의 그래프의 길이를 구하시오.

9. a가 양수이고 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$일 때, 매개변수 θ로 나타낸 함수 $x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta$의 그래프의 길이를 구하시오.

10. $\frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{4}$일 때, 매개변수 t로 나타낸 함수 $x = \cos t + t\sin t,\ y = \sin t - t\cos t$의 그래프의 길이를 구하시오.

11. a가 양수이고 $0 \le \theta \le 2\pi$일 때, 매개변수 θ로 나타낸 함수 $x = a(\theta - \sin\theta),\ y = a(1-\cos\theta)$의 그래프의 길이를 구하시오.

더 깊이 공부하고 싶은 사람을 위한 문제

1. 함수 f가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 미분 가능하고 f'이 구간 $[a,\ b]$에서 연속이며, $a \le x \le b$인 임의의 x에 대하여 $f(x) \ge 0$이라고 하자. 이때 $a \le x \le b$의 범위에서 함수 $y = f(x)$의 그래프를 x축을 축으로 한 바퀴 회전시켰을 때 자취가 만드는 회전면의 넓이는 다음과 같다.
$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$
   (1) 위 등식을 정당화하시오.
   (2) $0 \le x \le 1$의 범위에서 곡선 $y = x^3$을 x축을 축으로 회전시켰을 때 만들어지는 회전면의 넓이를 구하시오.
   (3) 정적분을 사용하여 반지름의 길이가 r인 구면의 겉넓이를 구하시오.

2. 함수 f가 구간 $[0, \infty)$로부터 구간 $[0, \infty)$ 위로의 함수이며 연속이고 순증가한다고 하자. 또한 $g = f^{-1}$라고 하자. 이때 임의의 양수 a, b에 대하여

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b g(y)dy \geq ab$$

가 성립함을 보이시오.

3. 적분을 사용하여 평면도형의 질량중심과 입체도형의 질량중심을 구하는 방법을 조사해 보자.

4. 회전체의 부피와 회전체의 겉넓이를 구하는 **파푸스의 무게중심 공식**(Pappus's centroid theorem)을 조사해 보자.[52]

5. 자연수 n에 대하여 다음과 같이 정의하자.

$$E_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{x}dx$$

이때 다음을 증명하시오.

(1) 임의의 자연수 n에 대하여 $0 < E_n \leq 1$이다.

(2) 수열 $\{E_n\}$은 감소수열이다.

(3) 수열 $\{E_n\}$은 수렴한다.

수열 $\{E_n\}$의 극한값은 $0.577215664901532\cdots$이다. 이 값을 **오일러-마스케로니 상수**(Euler-Mascheroni constant)라고 부르며 보통 γ로 나타낸다.[53] 이 값이 유리수인지 무리수인지 여부는 아직 밝혀지지 않았다.

6. **카발리에리의 원리**(Cavalieri's principle)를 조사해 보자.[54]

7. 부피가 유한이지만 겉넓이가 무한한 도형을 조사해 보자. [‘Gabriel's Horn’을 검색해 보자.]

52) 파푸스(Πάππος, 290-350)는 고대 그리스의 기하학자이다.

53) 오일러(Leonhard Euler, 1707-1783)는 스위스의 수학자이자 물리학자, 천문학자, 논리학자, 공학자이다. 마스케로니(Lorenzo Mascheroni, 1750-1800)는 이탈리아의 수학자이다.

54) 카발리에리(Bonaventura Cavalieri, 1598-1647)는 이탈리아의 수학자이다.

영어로 표현하기 (적분)

☐ A function F is an antiderivative of f on an interval I if $F'(x) = f(x)$ for all x in I.

☐ If F is an antiderivative of f on an interval I, then the general antiderivative of f on I is $F(x) + C$ where C is an arbitrary constant.

☐ The combination of a differential equation and an initial condition is called an initial value problem.

☐ Let f be a bounded function defined on $[a, b]$, and let x_i's are $(n+1)$ points such that

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Then the upper sum U_n of f over x_i's is greater than or equal to the lower sum L_n of f over x_i's.

☐ If the upper and lower integrals of f on $[a, b]$ are equal, we define the integral of f on $[a, b]$ to be the common value of the upper and lower integrals of f on $[a, b]$. In this case, the integral of f on $[a, b]$ is denoted

$$\int_a^b f(x)dx.$$

☐ If a function f is continuous over the interval $[a, b]$, or if has at most finitely many jump discontinuities there, then f is integrable over $[a, b]$.

☐ If f is continuous on $[a, b]$ and F is any antiderivative of f on $[a, b]$, then

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

☐ The net change in a differentiable function $F(x)$ over an interval $a \le x \le b$ is the integral of its rate of change, that is,

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx.$$

☐ If $u = g(x)$ is a differentiable function whose range is an interval I, and f is continuous on I, then

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du.$$

☐ If g' is continuous on the interval $[a, b]$ and f is continuous on the range of $g(x) = u$, then

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

☐ If f and g are continuous with $f(x) \ge g(x)$ throughout $[a, b]$, then the area A of the region between the curve $y = f(x)$ and $y = g(x)$ from a to b is the integral of $(f - g)$ from a to b, that is,

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

☐ The volume V of a solid of integrable cross-sectional area $A(x)$ from $x=a$ to $x=b$ is the integral of A from a to b, that is,

$$V=\int_a^b A(x)dx.$$

☐ If f and g are differentiable function of x, the product rule says that

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

In terms of indefinite integrals, this equation becomes

$$\int\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]dx=\int[f'(x)g(x)+f(x)g'(x)]dx$$

or

$$\int\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]dx=\int f'(x)g(x)dx+\int f(x)g'(x)dx.$$

☐ If a curve C is defined parametrically by $x=f(t)$ and $y=g(t)$, $a\le t\le b$, where f' and g' are continuous and not simultaneously zero on $[a, b]$, and C is traversed exactly once as t increases from $t=a$ to $t=b$, then the length of C is the definite integral

$$L=\int_a^b\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\,dt.$$

☐ Find the volume of the solid lies between planes perpendicular to the x-axis at $x=0$ and $x=4$, where the cross-sections perpendicular to the axis on the interval $0\le x\le 4$ are squares whose diagonals run from the parabola $y=-\sqrt{x}$ to the parabola $y=\sqrt{x}$.

☐ Find the volume of the solids generated by revolving the regions bounded by the curve $y=x^2$, and lines $x=0$ and $y=2-x$ for $x\ge 0$, about y-axis.

☐ Find the length of the curve $y=x^{3/2}$ from $x=0$ to $x=4$.

☐ Find the lateral surface area of the cone generated by revolving the line segment $y=x/2$ over $0\le x\le 4$, about the x-axis. Check your answer with the geometry formula: (lateral surface area)$=\frac{1}{2}\times$(base circumference)$\times$(slant height).

열여섯 번째 이야기

무한급수의 수렴과 발산

무한급수는 오랫동안 수학자들을 괴롭혀온 주제이다. 무한히 많은 개수의 양수를 더하더라도 어떤 경우는 수렴하고 어떤 경우는 발산하기 때문이다. 기원전 3세기 경 제논[55]은 ‘아킬레우스와 거북이 역설’, ‘화살 역설’ 등 무한급수의 성질에 기인한 다양한 역설을 주장하기도 했다.

오늘날 무한급수는 수 체계를 구성하고 함수의 성질을 밝히는 유용한 도구로 사용되고 있다. 이 단원에서는 무한급수의 개념을 살펴보자.

1 무한급수의 뜻

수열 $\{a_n\}$의 각 항을 차례로 덧셈 기호를 사용하여 연결한 식

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \qquad \cdots ㉠$$

을 **무한급수**(infinite series) 또는 간단히 **급수**라고 부르고,[56] 이 식을 기호로

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}$$

“시그마 n은 1부터 무한대까지 a n”

과 같이 나타낸다.[57]

또 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에서 첫째항부터 제 n항까지의 합

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

를 이 무한급수의 제 n항까지의 **부분합**(partial sum)이라고 부른다. 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 S에 수렴할 때, 즉

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S \qquad \cdots ㉡$$

일 때, “무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 S에 **수렴한다**.”라고 말한다.

이때 S를 **무한급수의 합**(sum) 또는 **무한급수의 값**(value)이라고 부르고, 이것을 기호로

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = S \quad \text{또는} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

와 같이 나타낸다.

한편 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 발산할 때, “무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 **발산한다**.”라고 말한다.

---

55) Ζήνων, 기원전 335-263년 경, 고대 그리스의 철학자이다.
56) 즉 ‘무한급수’라는 말은 무한히 많은 항을 더한 ‘값’을 의미하는 것이 아니라 항을 덧셈 기호로 연결한 ‘식’을 의미한다.
57) 무한급수의 첫째 항의 항번호는 1이 아니어도 된다. 예컨대 $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ 도 무한급수이다.

이로써 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴할 때, 기호 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 두 가지 의미를 가진다. 하나는 ㉠과 같이 $\{a_n\}$의 각 항을 차례로 덧셈 기호를 사용하여 연결한 식을 나타내며, 다른 하나는 ㉡과 같이 무한급수의 합을 나타낸다.

보기 **1.** 다음 무한급수를 살펴보자.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

n이 자연수일 때

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

이다. 따라서 문제의 무한급수의 부분합을 S_n이라고 하면 n이 충분히 큰 자연수일 때

$$S_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}$$

이다. 그러므로 문제의 무한급수는 수렴하고, 그 합은 $\frac{1}{2}$이다.

보기 **2.** 다음 무한급수를 살펴보자.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

n이 자연수일 때

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

이다. 따라서 문제의 무한급수의 부분합을 S_n이라고 하면 n이 충분히 큰 자연수일 때

$$S_n = (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \sqrt{n+1}-1$$

이고

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1) = \infty$$

이다. 그러므로 문제의 무한급수는 양의 무한대로 발산한다.

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 S에 수렴할 때, 부분합 S_n에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

이다. 그러므로 다음 정리를 얻는다.

정리 **1.** 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다. 이 성질을 **일반항 판정법**이라고 부른다.

보기 **3.** 정리 1은 무한급수가 발산함을 보일 때 자주 사용된다. 예컨대 다음 무한급수를 살펴보자.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{2n+1}$$

이 무한급수의 일반항의 극한은

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3n}{2n+1} = \frac{3}{2}$$

으로서 0에 수렴하지 않으므로, 위 무한급수는 수렴하지 않는다.

마찬가지로 다음 무한급수를 살펴보자.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

이 무한급수의 일반항 수열 $\{(-1)^n\}$이 진동하므로, 이 무한급수는 수렴하지 않는다.

참고 일반적으로 **정리 1**의 역은 성립하지 않는다. 예를 들어

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

이면 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$이지만 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$은 양의 무한대로 발산한다.

이러한 이유 때문에 무한급수가 수렴함을 보일 때 **정리 1**을 사용하기는 어렵다. □

무한급수의 부분합은 수열이고 수렴하는 무한급수의 합은 수열의 극한값이므로, 수열의 극한에 대한 성질로부터 다음 정리를 얻는다.

정리 **2.** 두 무한급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

일 때 다음이 성립한다.

(1) k가 상수일 때, 무한급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ka_n$이 수렴하고 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ka_n = kA$이다.

(2) 무한급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$이 수렴하고 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$이다.

(3) 무한급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$이 수렴하고 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = A - B$이다.

보기 **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 3$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = -4$일 때, 무한급수의 합을 구하는 예를 살펴보자.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3a_n - b_n) = 3 \times \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = 3 \times 3 - (-4) = 9 + 4 = 13.$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2a_n + 5b_n) = 2 \times \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + 5 \times \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = 2 \times 3 + 5 \times (-4) = 6 - 20 = -14.$

2 무한등비급수

첫째항이 a이고 공비가 r인 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$의 각 항의 합으로 이루어진 무한급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

을 첫째항이 a이고 공비가 r인 **무한등비급수** 또는 간단히 **등비급수**라고 부른다.58)

$a \neq 0$일 때, 무한등비급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$의 제 n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

이므로, $r \neq 1$일 때는

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

이며, $r=1$일 때는

$$S_n = na$$

이다.

따라서 첫째항이 0이 아닌 무한등비급수의 수렴과 발산은 공비 r의 값에 따라 다음과 같이 결정된다.

① $|r|<1$일 때 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = 0$이므로 부분합의 극한은 다음과 같다.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

② $r=1$일 때 $S_n = na$이므로 무한등비급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$은 발산한다.

③ $r>1$일 때 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$이므로 무한등비급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$은 발산한다.

④ $r \leq -1$일 때 수열 $\{r^n\}$이 진동하므로 무한등비급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$은 발산한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

정리 3. $a \neq 0$일 때, 무한등비급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$의 수렴과 발산은 다음과 같다.

(1) $|r|<1$일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$은 수렴하고, 그 합은 $\dfrac{a}{1-r}$이다.

(2) $|r| \geq 1$일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$은 발산한다.

58) 무한등비급수는 영어로 'geometric series'이다. 이러한 이유로 무한등비급수를 '기하급수'라고 부르기도 한다.

보기 5. 다음 무한등비급수의 수렴, 발산을 조사해 보자.

$$1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots$$

문제의 무한등비급수는 공비가 $\frac{2}{3}$이고 이 값의 절댓값이 1보다 작으므로, 문제의 무한등비급수는 수렴한다.

문제의 무한등비급수의 첫째항이 1이므로, 무한등비급수의 합은 $\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{3}}=3$이다.

보기 6. 다음 무한등비급수의 수렴, 발산을 조사해 보자.

$$1-\frac{4}{3}+\left(\frac{4}{3}\right)^2-\left(\frac{4}{3}\right)^3+-\cdots$$

문제의 무한등비급수는 공비가 $-\frac{4}{3}$이고 이 값의 절댓값이 1보다 크므로, 문제의 무한등비급수는 발산한다.

보기 7. 무한등비급수의 합을 사용하여 무한급수의 합을 계산하는 예를 살펴보자.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n=\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}+\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}=\frac{3}{2}+\frac{4}{1}=\frac{11}{2}.$

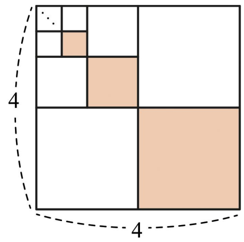
(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n+5^n}{(-6)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{-6}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{-6}\right)^n=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{-\frac{5}{6}}{1-\left(-\frac{5}{6}\right)}=\frac{1}{2}+\left(-\frac{5}{11}\right)=\frac{1}{22}.$

보기 8. 무한등비급수를 사용하여 순환소수를 분수로 바꾸는 예를 살펴보자.

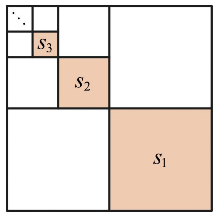
(1)
$$\begin{aligned}0.0\dot{1}\dot{2}&=\frac{12}{10^3}+\frac{12}{10^5}+\frac{12}{10^7}+\cdots\\&=\frac{12}{10^3}\left\{1+\frac{1}{100}+\left(\frac{1}{100}\right)^2+\left(\frac{1}{100}\right)^3+\cdots\right\}\\&=\frac{12}{10^3}\times\frac{1}{1-\frac{1}{100}}=\frac{12}{1000}\times\frac{100}{99}=\frac{12}{990}=\frac{2}{165}.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}1.\dot{0}1\dot{2}&=1+\frac{12}{1000}+\frac{12}{1000^2}+\frac{12}{1000^3}+\cdots\\&=1+12\times\left\{\frac{1}{1000}+\left(\frac{1}{1000}\right)^2+\left(\frac{1}{1000}\right)^3+\cdots\right\}\\&=1+12\times\frac{\frac{1}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}=1+12\times\frac{1}{999}\\&=1+\frac{12}{999}=\frac{1011}{999}=\frac{337}{333}.\end{aligned}$$

보기 9. 무한등비급수의 합을 활용하여 프랙탈 도형의 넓이를 구하는 예를 살펴보자.



그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형을 사등분하여 만들어지는 작은 정사각형 한 개를 칠한다. 또 칠하지 않은 나머지 정사각형 3개 중 색칠한 정사각형과 한 꼭짓점에서 만나는 정사각형을 다시 사등분하여 만들어지는 작은 정사각형 한 개를 칠한다. 이와 같은 과정을 한없이 반복할 때, 칠한 정사각형의 넓이의 합을 구하자.



칠한 정사각형의 넓이를 큰 것부터 차례로 s_1, s_2, s_3, $\cdots$이라고 하면

$$s_1 = 4,$$

$$s_2 = 4 \times \frac{1}{4},$$

$$s_3 = 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2,$$

$$\vdots$$

이다. 따라서 수열 $\{s_n\}$은 첫째항이 4이고 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이다. 그러므로 칠한 정사각형의 넓이의 합은 다음과 같다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n = \frac{4}{1-\frac{1}{4}} = \frac{16}{3}.$$

연습문제

개념에 익숙해지기 위한 문제

1. 다음 무한급수가 수렴하는지 판별하고, 수렴하면 그 합을 구하시오.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n-10)$

(3) $\frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4} + - \cdots$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{5}{4}\right)^n$

2. 다음 무한급수의 수렴, 발산을 조사하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$$

3. 다음 무한급수의 합을 구하시오.

$$1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} + \cdots$$

4. 다음 무한급수의 합을 구하시오.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-4)^n}{5^n}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^{n+1}}{4^n} + \frac{5}{2^n}\right)$

5. 무한급수의 합을 사용하여 순환소수 $1.2\dot{3}\dot{5}$를 분수로 나타내시오.

6. $\{a_n\}$이 실수열이고, $\{a_n\}$의 무한급수의 부분합을 S_n이라고 하자.

$$S_n = \frac{5n+1}{n+1}$$

일 때 다음을 구하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + a_{n+1}).$$

7. $\{a_n\}$이 등차수열이고 $a_1 = 3$, $a_6 - a_4 = 4$를 만족시킨다. 이때 다음을 구하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1}}$$

8. 다음 무한급수가 수렴하도록 하는 x의 값의 범위를 구하시오.

$$1 - 3x + 9x^2 - 27x^3 + 81x^4 - 243x^5 + - \cdots$$

9. 다음 무한급수가 수렴하도록 하는 x의 값의 범위를 구하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-2x)^{n-1}$$

개념을 다지기 위한 문제

10. 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이고 첫째항이 a이며 공비가 r라고 하자. 또한

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = 2 \text{ 그리고 } \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2 = 6$$

이 성립한다고 하자. 이때 a와 r의 값을 각각 구하시오.

11. 수열 $\{a_n\}$이 다음을 만족시킨다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{3^n} - 1\right) = 2$$

이때 다음 극한을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n + 2^{n+1}}{3^{n-1} + 2^{n-1}}$$

12. 수열 $\{a_n\}$이 임의의 자연수 n에 대하여 다음을 만족시킨다.

$$\sum_{k=1}^{n}a_k = \frac{1}{2}(n^2 - n)$$

이때 다음을 구하시오.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+2}}$$

13. x에 대한 방정식 $7x^2 + x - 1 = 0$의 두 근을 α, β라고 하자. 이때 다음을 구하시오.

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}(\beta^n - \alpha^n)$$

14. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-3)=2$$

가 성립한다고 하자. 이때 다음 극한을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n-1}{2a_n+3}$$

15. 다음 등식이 성립하도록 하는 x의 값을 열린구간 $(0,\ \pi)$에서 구하시오.

$$1+\cos x+\cos^2 x+\cos^3 x+\cdots\ =2+\sqrt{2}\,.$$

실력을 향상시키기 위한 문제

16. $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 실수열이고, 다음 두 무한급수가 모두 수렴한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{4n-1}{2n+1}\right),\quad \sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+b_n).$$

이때 다음 극한을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6-b_n}{2a_n}$$

17. $\{a_n\}$이 실수열이고 다음이 성립한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(na_n-\frac{3n^2-1}{n+1}\right)=4$$

이때 다음 극한을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty}\left({a_n}^2-2a_n+3\right)$$

18. n이 자연수일 때, 좌표평면에서 x축과 y축, 그리고 직선

$$\frac{x}{2^{n+1}-1}+\frac{y}{2^n+2}=1$$

로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 a_n이라고 하자. 이때 다음 무한급수의 합을 구하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{6^n}$$

19. 수열 $\{a_n\}$이 실수열이고, 임의의 자연수 n에 대하여 다항식 $a_nx^2+2a_nx-3$을 $x-n$으로 나누었을 때 나머지가 항상 1이라고 하자. 이때 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$을 구하시오.

20. n이 자연수일 때 직선 $x=n$이 두 곡선 $y=2^{3-x}$, $y=-3^{-x}$과 만나는 두 점 사이의 거리를 L_n이라고 하자. 이때 $\sum_{n=1}^{\infty}L_n$을 구하시오.

21. a와 b가 상수이고 $0<a<b$이며

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+2b^n}{a^n+b^{n+1}}=\frac{1}{2}$$

이 성립한다고 하자. 이때 b의 값을 구하시오.

열일곱 번째 이야기

양항급수의 판정법

무한급수의 수렴·발산을 조사하는 공식을 판정법이라고 부른다. 무한급수의 모든 항의 부호가 같을 때는 서로 다른 부호의 항이 혼재되어 있을 때보다 수렴·발산을 판정하기 쉽다. 또한 모든 항의 부호가 같은 무한급수의 성질은 더 일반적인 형태의 무한급수의 성질을 밝힐 때 유용하게 활용된다.

이 단원에서는 양항급수의 성질과 여러 가지 판정법을 살펴보자.

1 단조수렴 정리로부터 얻는 판정법

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 0 이상일 때, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$을 **양항급수**(series with non-negative terms)라고 부른다. 양항급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합을 S_n이라고 하면

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0$$

이므로 $\{S_n\}$은 단조증가수열이다. 그러므로 단조수렴 정리에 의하여 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하기 위한 필요충분조건은 부분합 수열 $\{S_n\}$이 유계인 것이다.

정리 1. 부분합이 유계인 양항급수의 성질

양항급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합 수열을 $\{S_n\}$이라고 하자. 이때 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하기 위한 필요충분조건은 $\{S_n\}$이 유계인 것이다.

보기 1. 다음 무한급수가 수렴하는지 판정해 보자.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

문제의 무한급수는 모든 항이 양수이다. 즉 양항급수이다.

n이 충분히 큰 자연수일 때 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} &\leq \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

그러므로 문제의 무한급수의 부분합을 S_n이라고 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq 2$$

이다. 즉 $\{S_n\}$이 유계이다. 따라서 정리 1에 의하여 문제의 무한급수가 수렴한다.

보기 **2.** 다음 무한급수가 수렴하는지 판정해 보자.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

문제의 무한급수는 모든 항이 양수이다. 즉 양항급수이다.

n이 충분히 큰 자연수일 때 다음이 성립한다.

$$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\le\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\le 3$$

그러므로 문제의 무한급수의 부분합을 S_n이라고 하면

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\le 3$$

이다. 즉 $\{S_n\}$이 유계이다. 따라서 **정리** 1에 의하여 문제의 무한급수가 수렴한다.

보기 **3.** 다음 무한급수(조화급수; harmonic series)가 수렴하는지 판정해 보자.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

문제의 무한급수는 모든 항이 양수이다. 즉 양항급수이다.

문제의 무한급수의 부분합을 S_n이라고 하자. m이 충분히 큰 자연수이고 $n=2^m$일 때 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}S_{2^m}&=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^m}\right)\\&\ge\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^m}+\frac{1}{2^m}+\cdots+\frac{1}{2^m}\right)\\&=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\times m=1+\frac{m}{2}.\end{aligned}$$

여기서 m은 얼마든지 커질 수 있으므로 $\{S_{2^m}\}$은 위로 유계가 아니다. 그러므로 $\{S_n\}$도 위로 유계가 아니다. 따라서 **정리** 1에 의하여 문제의 무한급수가 발산한다.

두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$의 모든 항이 0 이상이고, 임의의 항번호 n에 대하여 $a_n\le b_n$이라고 하자. 이때 다음 두 무한급수를 살펴보자.

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}b_n.$$

두 무한급수의 부분합을 각각 A_n, B_n이라고 하자.

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴한다고 가정하자. 그리고 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$의 합을 B라고 하자. 그러면 임의의 자연수 n에 대하여

$$A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\le\sum_{k=1}^{n}b_k\le B$$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 부분합 수열 $\{A_n\}$이 유계이다. 그러므로 **정리** 1에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

정리 2. 양항급수의 비교 판정법 (direct comparison test)

두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$의 모든 항이 0 이상이고, 임의의 항번호 n에 대하여 $a_n \le b_n$이라고 하자.

(1) 만약 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하면 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$도 수렴한다.

(2) 만약 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 발산하면 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$도 발산한다.

보기 4. $p \ge 2$일 때 다음 무한급수가 수렴하는지 판정해 보자.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

임의의 자연수 n에 대하여

$$0 \le \frac{1}{n^p} \le \frac{1}{n^2}$$

이다. 그런데 **보기 1**에서 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$이 수렴함을 밝혔다. 그러므로 비교 판정법에 의하여 문제의 무한급수가 수렴한다.

보기 5. $0 < p \le 1$일 때 다음 무한급수가 수렴하는지 판정해 보자.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

임의의 자연수 n에 대하여

$$\frac{1}{n} \le \frac{1}{n^p}$$

이다. 그런데 **보기 3**에서 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$이 발산함을 밝혔다. 그러므로 비교 판정법에 의하여 문제의 무한급수가 발산한다.

두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$의 모든 항이 양수라고 하자. 그리고 수열 $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$이 수렴하며

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{a_n} = \rho$$

이고 $\rho > 0$이라고 하자.

$\epsilon = \frac{1}{2}\rho$라고 하자. 수열의 극한의 정의에 의하여 자연수 N이 존재하여

$$n > N\text{인 모든 } n\text{에 대하여 } \left|\frac{b_n}{a_n} - \rho\right| < \epsilon$$

을 만족시킨다.

$n > N$일 때 부등식을 변형하면

$$\frac{1}{2}\rho < \frac{b_n}{a_n} < \frac{3}{2}\rho$$

즉

$$\frac{1}{2}\rho a_n < b_n < \frac{3}{2}\rho a_n$$

이다. 이 부등식은 $n > N$인 모든 n에 대하여 성립하고 부등식의 각 변이 양수이므로, 이 부등식과 양항급수의 비교 판정법에 의하여 다음을 얻는다.

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \text{이 수렴하기 위한 필요충분조건은 } \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n \text{이 수렴하는 것이다.}$$

그런데 무한급수에 유한 개의 항을 추가하여도 수렴, 발산 여부는 바뀌지 않으므로 위 진술에서 무한급수의 첫째항의 번호 $N+1$을 1로 바꾸어도 된다. 이상을 정리하면 다음 정리를 얻는다.

정리 3. 양항급수의 극한비교 판정법 (limit comparison test)

두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$의 모든 항이 양수이고 수열 $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$이 수렴하며 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \rho$이고 $\rho > 0$이라고 하자. 이때 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하기 위한 필요충분조건은 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하는 것이다.

보기 6. 다음 무한급수가 수렴하는지 판정해 보자.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2 - n + 3}{n^3 + 2n}$$

자연수 n에 대하여 $a_n = \dfrac{4n^2 - n + 3}{n^3 + 2n}$, $b_n = \dfrac{1}{n}$이라고 정의하자. 그러면 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$은 모든 항이 양수인 수열이며

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n^3 - n^2 + 3n}{n^3 + 2n} = 4$$

이다. 그러므로 극한비교 판정법에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하기 위한 필요충분조건은 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하는 것이다. 그런데 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$이 발산하므로 문제의 무한급수도 발산한다.

이상적분을 사용하여 무한급수의 수렴 발산을 판정하는 방법을 살펴보자.

함수 f가 $[1, \infty)$에서 정의되어 있고 $\{a_n\}$이 수열이며 임의의 자연수 n에 대하여 $a_n = f(n)$을 만족시킨다고 하자. 또한 $[1, \infty)$의 임의의 원소 x에 대하여 $f(x) \geq 0$이며, f가 $[1, \infty)$에서 단조감소한다고 하자.

$n \geq 2$인 임의의 자연수 n에 대하여, $n \leq x \leq n+1$일 때 $f(x) \leq f(n)$이고, $n-1 \leq x \leq n$일 때 $f(n) \leq f(x)$이므로

$$\int_{n}^{n+1} f(x)dx \leq \int_{n}^{n+1} f(n)dx = f(n) = \int_{n-1}^{n} f(n)dx \leq \int_{n-1}^{n} f(x)dx$$

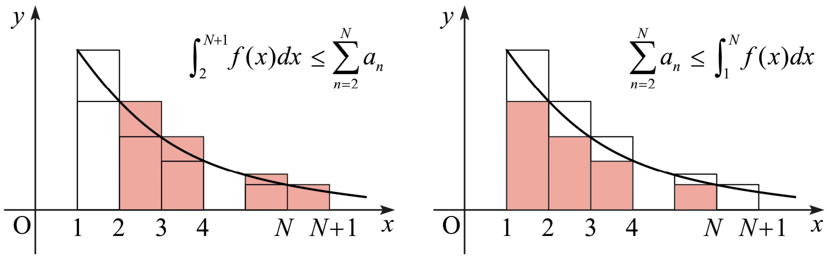
즉

$$\int_{n}^{n+1} f(x)dx \leq a_n \leq \int_{n-1}^{n} f(x)dx$$

이다. $n=2$일 때부터 $n=N$일 때까지 부등식을 변마다 더하면 다음을 얻는다.

$$\int_{2}^{N+1} f(x)dx \leq \sum_{n=2}^{N} a_n \leq \int_{1}^{N} f(x)dx \qquad \cdots ㉠$$

이 부등식은 다음과 같은 그림으로 나타낼 수 있다.



만약 무한급수 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$이 수렴한다면 ㉠의 첫 번째 부등식으로부터 이상적분 $\int_{2}^{\infty} f(x)dx$가 수렴한다는 결론을 얻는다.

역으로, 만약 이상적분 $\int_{1}^{\infty} f(x)dx$가 수렴한다면 ㉠의 두 번째 부등식으로부터 무한급수 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$이 수렴한다는 결론을 얻는다.

무한급수에 유한 개의 항을 추가하여도 수렴, 발산 여부는 바뀌지 않으며, 구간의 길이가 무한인 이상적분에서 길이가 유한인 구간을 적분구간에 추가하여도 이상적분의 수렴, 발산 여부는 바뀌지 않는다. 그러므로 다음 정리를 얻는다.

정리 4. 양항급수의 적분 판정법 (integral test)

함수 f가 $[1, \infty)$에서 정의되어 있고 $\{a_n\}$이 수열이며 임의의 자연수 n에 대하여 $a_n = f(n)$을 만족시킨다고 하자. 또한 $[1, \infty)$의 임의의 원소 x에 대하여 $f(x) \geq 0$이며, f가 $[1, \infty)$에서 단조감소한다고 하자.

이때 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하기 위한 필요충분조건은 이상적분 $\int_{1}^{\infty} f(x)dx$가 수렴하는 것이다.

보기 7. 보기 1, 보기 4, 보기 5를 통해서, $0 < p \leq 1$일 때와 $p \geq 2$일 때 다음 무한급수의 수렴, 발산 여부를 판정하였다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

이제 $1 < p < 2$일 때 위 무한급수('p-급수'라고 부른다)의 수렴, 발산을 밝혀 보자.

$a_n = \dfrac{1}{n^p}$이라고 하고, $x \geq 1$인 실수 x에 대하여

$$f(x) = \frac{1}{x^p}$$

이라고 하자. 그러면 f는 $[1, \infty)$에서 연속이고 단조감소하며 임의의 자연수 n에 대하여 $a_n = f(n)$이다. 그런데

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} f(x)dx &= \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^p}dx \\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_{x=1}^{x=b} = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right) = \frac{1}{p-1}\end{aligned}$$

이므로 이상적분 $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$가 수렴한다. 그러므로 적분 판정법에 의하여 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$도 수렴한다.

한편 $p \leq 0$일 때는 $\left\{\dfrac{1}{n^p}\right\}$이 0에 수렴하지 않으므로 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$이 발산한다.

2 무한등비급수로부터 얻는 판정법

양항급수의 비교 판정법, 극한비교 판정법, 적분 판정법은 무한급수의 수렴, 발산을 판정하기 위하여 다른 무한급수나 이상적분이 필요하였다.

이제 다른 무한급수의 힘을 빌리지 않고 무한급수의 수렴, 발산을 판정하는 방법 두 가지를 살펴보자.

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이고 $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$이 수렴하며

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho \qquad \cdots ㉡$$

라고 하자. 이때 ρ의 값을 조사하여 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 수렴, 발산을 판정할 수 있다.

극한 ㉡은 직관적으로는 n의 값이 커질수록 수열 $\{a_n\}$의 인접한 두 항의 비 a_{n+1}/a_n이 ρ에 가까워짐을 의미한다. 즉 n의 값이 커질수록 수열 $\{a_n\}$은 공비가 ρ인 등비수열처럼 움직인다.

그러므로 $\rho < 1$일 때 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하고 $\rho > 1$일 때 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 발산할 것이라고 추측할 수 있다.

정리 5. 양항급수의 비 판정법 (ratio test)

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이고 수열 $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$이 수렴하며

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$$

라고 하자.

(1) 만약 $\rho<1$이면 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴한다.

(2) 만약 $\rho>1$이면 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 발산한다.

(3) 만약 $\rho=1$이면 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 수렴할 수도 있고 발산할 수도 있다.

증명 (1) 먼저 $\rho<1$인 경우를 살펴보자. $\epsilon=\dfrac{1-\rho}{2}$라고 하자. 그러면 $\epsilon>0$이다. 수열의 극한의 정의에 의하여 자연수 N이 존재하여, $n>N$인 모든 자연수 n에 대하여

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-\rho\right|<\epsilon$$

이 성립한다. $r=\dfrac{1+\rho}{2}$라고 두고 이 부등식을 변형하면

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\rho+\epsilon=\rho+\frac{1-\rho}{2}=\frac{1+\rho}{2}=r$$

즉

$$a_{n+1}<ra_n$$

이다. 이 부등식은 $n>N$일 때 성립하므로 k가 2 이상인 자연수일 때 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}
&a_{N+2}<ra_{N+1},\\
&a_{N+3}<ra_{N+2}<r^2a_{N+1},\\
&a_{N+4}<ra_{N+3}<r^3a_{N+1},\\
&\qquad\vdots\\
&a_{N+k}<r^{k-1}a_{N+1}.
\end{aligned}$$

각 부등식의 우변은 공비가 r인 등비수열을 이루는데 r는 $r<1$인 양수이므로 부등식의 우변을 이루는 수열의 무한급수가 수렴한다. 그러므로 비교 판정법에 의하여 무한급수

$$\sum_{k=2}^{\infty}a_{N+k}$$

도 수렴한다. 또한

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\sum_{k=1}^{N+1}a_k+\sum_{k=2}^{\infty}a_{N+k}$$

이므로 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$도 수렴한다.

(2) 다음으로 $\rho > 1$인 경우를 살펴보자. $\epsilon = 1 - \rho$라고 두면 $\epsilon > 0$이다. 그러므로 수열의 극한의 정의에 의하여 자연수 N이 존재하여, $n > N$인 모든 자연수 n에 대하여

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - \rho \right| < \epsilon$$

이 성립한다. 이 부등식을 변형하면

$$1 = \rho - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

이므로, $n > N$일 때 $a_n < a_{n+1}$이다. 이것은 $n > N$일 때 $\{a_n\}$의 항이 증가함을 의미한다. 그런데 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 $\{a_n\}$은 0에 수렴하지 않는다. 그러므로 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다. ■

보기 **8.** $x > 0$일 때 다음 무한급수가 수렴하는지 판정해 보자.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$a_n = \dfrac{x^n}{n!}$이라고 하자. 그러면 모든 n에 대하여 $a_n > 0$이다. 또한

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{x}{n+1} = 0 < 1$$

이므로, 비 판정법에 의하여 문제의 무한급수는 수렴한다.

보기 **9.** 다음 두 무한급수를 살펴보자.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

$a_n = \dfrac{1}{n}$, $b_n = \dfrac{1}{n^2}$이라고 하면

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1$$

이다. 그런데 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산하고 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 수렴한다.

그러므로 **정리 1**에서 $\rho = 1$인 경우는 비 판정법만으로는 무한급수가 수렴하는지 밝힐 수 없다.

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 0 이상이고 $\{\sqrt[n]{a_n}\}$이 수렴하며

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho \qquad \cdots ㉢$$

라고 하자. 이때 ρ의 값을 조사하여 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 수렴, 발산을 판정할 수 있다.

극한 ㉢은 직관적으로는 n의 값이 커질수록 항 $\sqrt[n]{a_n}$의 값이 ρ에 가까워짐을 의미한다. 즉 n의 값이 커질수록 a_n은 ρ^n처럼 움직이므로, 수열 $\{a_n\}$이 공비가 ρ인 등비수열처럼 움직인다고 볼 수 있다.

그러므로 $\rho<1$일 때 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하고 $\rho>1$일 때 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 발산할 것이라고 추측할 수 있다.

정리 6. 양항급수의 제곱근 판정법 (root test)

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 0 이상이고 수열 $\{\sqrt[n]{a_n}\}$이 수렴하며

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho$$

라고 하자.

(1) 만약 $\rho<1$이면 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴한다.

(2) 만약 $\rho>1$이면 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 발산한다.

(3) 만약 $\rho=1$이면 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴할 수도 있고 발산할 수도 있다.

증명 (1) 먼저 $\rho<1$인 경우를 살펴보자. $\epsilon=\dfrac{1-\rho}{2}$라고 하자. 그러면 $\epsilon>0$이다. 수열의 극한의 정의에 의하여 자연수 N이 존재하여, $n>N$인 모든 자연수 n에 대하여

$$\left|\sqrt[n]{a_n}-\rho\right|<\epsilon$$

이 성립한다. $r=\dfrac{1+\rho}{2}$라고 두고 이 부등식을 변형하면

$$\sqrt[n]{a_n}<\rho+\epsilon=\rho+\frac{1-\rho}{2}=\frac{1+\rho}{2}=r$$

즉

$$a_n<r^n$$

이다. 이 부등식은 $n>N$일 때 성립하므로 k가 자연수일 때 다음이 성립한다.

$$\begin{gathered} a_{N+1}<r^{N+1}, \\ a_{N+2}<r^{N+2}, \\ a_{N+3}<r^{N+3}, \\ \vdots \\ a_{N+k}<r^{N+k} \end{gathered}$$

각 부등식의 우변은 공비가 r인 등비수열을 이루는데 r는 $r<1$인 양수이므로 부등식의 우변을 이루는 수열의 무한급수가 수렴한다. 그러므로 비교 판정법에 의하여 무한급수

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k}$$

도 수렴한다. 또한

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k=\sum_{k=1}^{N} a_k+\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k}$$

이므로 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$도 수렴한다.

(2) 다음으로 $\rho > 1$인 경우를 살펴보자. $\epsilon = 1 - \rho$라고 두면 $\epsilon > 0$이다. 그러므로 수열의 극한의 정의에 의하여 자연수 N이 존재하여, $n > N$인 모든 자연수 n에 대하여

$$\left|\sqrt[n]{a_n} - \rho\right| < \epsilon$$

이 성립한다. 이 부등식을 변형하면

$$1 = \rho - \epsilon < \sqrt[n]{a_n}$$

이므로 $n > N$일 때 $a_n > 1$이다. 즉 수열 $\{a_n\}$이 0에 수렴하지 않는다.

그러므로 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 발산한다. ■

보기 10. $x \geq 0$일 때, 다음 무한급수가 수렴하도록 하는 x의 범위를 구해 보자.

$$1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 + 2x^5 + \cdots$$

만약 $x = 0$이면 문제의 무한급수는 명백하게 수렴한다. 그러므로 $x > 0$이라고 두고 생각하자. 문제의 무한급수의 n번째 항을 a_n으로 두자.

문제를 해결하기 위해 비 판정법은 사용할 수 없다. 왜냐하면 인접한 항의 비

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

의 값이 $2x$와 $\frac{1}{2}x$가 번갈아가면서 나타나기 때문이다. 대신 제곱근 판정법을 사용하자.

n이 홀수일 때

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{x^{n-1}} = x^{\frac{n-1}{n}}$$

이고, n이 짝수일 때

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{2x^{n-1}} = 2^{\frac{1}{n}} \times x^{\frac{n-1}{n}}$$

이므로, 어느 때나

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = x$$

이다. 그러므로 제곱근 판정법에 의하여 $x < 1$일 때 문제의 무한급수가 수렴하고, $x > 1$일 때 문제의 무한급수가 발산한다.

한편 $x = 1$일 때 문제의 무한급수의 일반항이 0에 수렴하지 않으므로, 문제의 무한급수가 발산한다. 따라서 문제의 무한급수가 수렴하도록 하는 x의 범위는 $0 \leq x < 1$이다.

보기 11. 비 판정법과 마찬가지로 제곱근 판정법에서도 $\rho = 1$일 때 제곱근 판정법만으로는 무한급수가 수렴하는지 밝힐 수 없다. 예컨대

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = \frac{1}{n^2}$$

이라고 하면

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1, \quad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{b_n} = 1$$

이다. 그런데 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산하고 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 수렴한다.

연습문제

개념에 익숙해지기 위한 문제

1. 다음 무한급수가 수렴하는지 판정하시오.

(1) $1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}}+\cdots$

(2) $\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{29}+\cdots+\frac{1}{n^3+2}+\cdots$

(3) $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$

(4) $2+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{3^3}+\frac{5}{4^3}+\cdots+\frac{n+1}{n^3}+\cdots$

(5) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\cdots+\frac{1}{n^n}+\cdots$

(6) $1+\frac{2^2+1}{2^3+1}+\frac{3^2+1}{3^3+1}+\frac{4^2+1}{4^3+1}+\cdots+\frac{n^2+1}{n^3+1}+\cdots$

2. 비 판정법을 사용하여 다음 무한급수의 수렴·발산 여부를 판정하시오.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n\cdot 4^{n-1}}$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+1}$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^n}{(n+1)!}$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

3. 다음 무한급수가 수렴하는지 판정하시오.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+1)}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

(5) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3-1}$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-2}{n^3}$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^3+n}$

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2}{n^4+n^3}$

(10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^2-n}$

(11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^3-n^2}$

(12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^4-n^4}$

개념을 다지기 위한 문제

4. 두 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 수렴할 때, 다음을 보이시오.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} k a_n = k\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (k는 상수)

5. 두 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하는 양항급수일 때 다음 물음에 답하시오.

(1) 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$도 수렴함을 보이시오.

(2) 일반적으로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \neq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$임을 설명하시오.

6. 정리 5, 정리 6에서 $p = \infty$일 때 무한급수가 수렴하는지 또는 발산하는지 밝히고 이를 증명하시오.

실력을 향상시키기 위한 문제

7. 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이고 단조감소하며 0에 수렴한다고 하자. 다음 물음에 답하시오.

(1) 임의의 자연수 n에 대하여 $a_1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$임을 보이시오.

(2) 임의의 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k \leq a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$임을 보이시오.

(3) 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하기 위한 필요충분조건이 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$가 수렴하는 것임을 보이시오. 이와 같은 판정법을 **코시의 응집 판정법**(Cauchy condensation test) 또는 **2^n-판정법**이라고 부른다.

8. 다음 무한급수가 수렴하는지 판정하시오.

(1) $\frac{1}{3\ln 2} + \frac{1}{4\ln 3} + \frac{1}{5\ln 4} + \cdots + \frac{1}{(n+2)\ln(n+1)} + \cdots$

(2) $\frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \cdots + \frac{n}{e^n} + \cdots$

9. 다음 무한급수가 수렴하는지 판정하시오.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2+2}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$

(3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{n-1}}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\ln n}$

(6) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n \ln(\ln n)}$

다양한 무한급수의 판정법

앞 단원에서 양항급수의 수렴 판정법을 살펴보았다. 그러나 다양한 응용 상황에서 사용되는 무한급수는 양항급수가 아닌 경우가 많으므로 양항급수가 아닌 무한급수의 수렴 판정법이 필요하다.

이 단원에서는 양항급수가 아닌 무한급수를 판정하는 방법을 살펴보자.

1 절대수렴과 조건수렴

$\{a_n\}$이 실수열이라고 하자. 이때 다음과 같이 정의한다.

- 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$이 수렴하면, "무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 **절대수렴한다**(converge absolutely)."라고 말한다.
- 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하지만 절대수렴하지는 않는다면, "무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 **조건수렴한다**(converge conditionally)."라고 말한다.

절대수렴하는 무한급수의 특징을 밝히고, 절대수렴과 조건수렴의 관계를 살펴보자.

수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음과 같이 정의한다.

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{if } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{if } a_n < 0 \end{cases}$$

그리고

$$a_n^- = \begin{cases} -a_n & \text{if } a_n \leq 0 \\ 0 & \text{if } a_n > 0. \end{cases}$$

그러면 $\{a_n^+\}$과 $\{a_n^-\}$은 모든 항이 0 이상인 수열이다. 또한 임의의 n에 대하여 다음이 성립한다.

$$a_n = a_n^+ - a_n^- \quad \text{그리고} \quad |a_n| = a_n^+ + a_n^- .$$

더욱이 임의의 n에 대하여

$$a_n^+ \leq |a_n| \quad \text{그리고} \quad a_n^- \leq |a_n|$$

이 성립한다. 따라서, 만약 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$이 수렴한다면 양항급수의 비교 판정법에 의하여 두 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$와 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$가 모두 수렴한다.

역으로 $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$이므로, 만약 두 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$와 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$가 모두 수렴한다면 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$도 수렴한다. 이상을 정리하면 다음과 같다.

> 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 절대수렴할 필요충분조건은 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$와 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$가 모두 수렴하는 것이다.

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 절대수렴한다고 하자. 그러면 두 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$와 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$가 모두 수렴한다. 그런데 임의의 자연수 n에 대하여 $a_n = a_n^+ - a_n^-$이므로, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$도 수렴한다.

따라서 다음과 같은 정리를 얻는다.

정리 1. 절대수렴과 조건수렴의 관계

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 절대수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴한다.

보기 1. 다음 무한급수가 수렴하도록 하는 x의 범위를 구해 보자.

$$1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 + 2x^5 + \cdots$$

17단원의 **보기 10**에서, $0 \le x < 1$일 때 이 무한급수가 수렴하고 $x \ge 1$일 때 이 무한급수가 발산함을 확인하였다. 그러므로 $-1 < x < 0$일 때 다음 무한급수가 수렴한다.

$$1 + 2|x| + |x|^2 + 2|x|^3 + |x|^4 + 2|x|^5 + \cdots$$

즉 $-1 < x < 1$일 때 문제의 무한급수가 절대수렴한다.

한편 $x \le -1$일 때는 이 무한급수의 일반항이 0에 수렴하지 않으므로, 문제의 무한급수가 발산한다. 그러므로 구하는 범위는 $-1 < x < 1$이다.

정리 1을 사용하여 양항급수의 비 판정법을 더 많은 무한급수에 적용하도록 확장할 수 있다.

수열 $\{a_n\}$이 0이 아닌 항으로 이루어져 있고 수열 $\left\{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right\}$이 ρ에 수렴한다고 하자.

만약 $\rho < 1$라면 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$이 수렴하므로 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 절대수렴한다.

만약 $\rho > 1$이라면 수열 $\{|a_n|\}$이 0에 수렴하지 않으므로 수열 $\{a_n\}$도 0에 수렴하지 않는다. 그러므로 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 발산한다.

정리 2. 무한급수의 비 판정법

수열 $\{a_n\}$이 0이 아닌 항으로 이루어져 있고 수열 $\left\{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right\}$이 수렴하며

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$$

라고 하자.

(1) 만약 $\rho < 1$이면 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 절대수렴한다.

(2) 만약 $\rho > 1$이면 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 발산한다.

(3) 만약 $\rho = 1$이면 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴할 수도 있고 발산할 수도 있다.

제곱근 판정법도 마찬가지로 확장할 수 있다.

수열 $\{a_n\}$에 대하여, 수열 $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$이 수렴하며 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$라고 하자.

만약 $\rho<1$이라면 무한급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$이 수렴하므로 무한급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$이 절대수렴한다.

만약 $\rho>1$이라면 수열 $\{|a_n|\}$이 0에 수렴하지 않으므로 수열 $\{a_n\}$도 0에 수렴하지 않는다. 그러므로 무한급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$이 발산한다.

정리 3. 무한급수의 제곱근 판정법

수열 $\{a_n\}$에 대하여, 수열 $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$이 수렴하며

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$$

라고 하자.

(1) 만약 $\rho<1$이면 무한급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$이 절대수렴한다.

(2) 만약 $\rho>1$이면 무한급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$이 발산한다.

(3) 만약 $\rho=1$이면 무한급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$은 수렴할 수도 있고 발산할 수도 있다.

보기 2. 다음 무한급수가 수렴하도록 하는 실수 x의 범위를 구해 보자.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

먼저 $x=0$일 때는 문제의 무한급수가 명백히 수렴한다. 그러므로 $x\neq0$인 경우를 살펴보자.

x가 0이 아닌 실수라고 하자. 그리고 $a_n=\dfrac{x^n}{n!}$이라고 하자. 그러면

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}=0$$

이므로, 비 판정법에 의하여 문제의 무한급수가 절대수렴한다.

그러므로 문제의 무한급수가 수렴하도록 하는 x의 범위는 모든 실수이다.

보기 3. 다음 무한급수가 수렴하도록 하는 실수 x의 범위를 구해 보자.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n+3^n}$$

먼저 $x=0$일 때는 문제의 무한급수가 명백히 수렴한다. 그러므로 $x\neq0$인 경우를 살펴보자.

x가 0이 아닌 실수라고 하자. 그리고 $a_n=\dfrac{x^n}{2^n+3^n}$이라고 하자.

그러면 임의의 자연수 n에 대하여 다음이 성립한다.

$$\left|\frac{x^n}{2\times3^n}\right|=\left|\frac{x^n}{3^n+3^n}\right|\le\left|\frac{x^n}{2^n+3^n}\right|\le\left|\frac{x^n}{3^n}\right|$$

그런데

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^n}{2 \times 3^n} \right|^{\frac{1}{n}} = \frac{|x|}{3} \quad \text{그리고} \quad \lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^n}{3^n} \right|^{\frac{1}{n}} = \frac{|x|}{3}$$

이므로 조임 정리에 의하여

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^n}{2^n + 3^n} \right|^{\frac{1}{n}} = \frac{|x|}{3}$$

이다. 그러므로 제곱근 판정법에 의하여 $|x| < 3$일 때 문제의 무한급수가 절대수렴하고, $|x| > 3$일 때 문제의 무한급수가 발산한다.

한편 $x = 3$이거나 $x = -3$일 때

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^n}{2^n + 3^n} \right| = 1$$

이므로, 문제의 무한급수의 일반항이 0에 수렴하지 않는다. 따라서 문제의 무한급수가 발산한다.

그러므로 구하는 x의 범위는 $-3 < x < 3$이다.

2 교대급수

양항급수가 아닌 무한급수 중에 가장 자주 나타나는 무한급수는 양수인 항과 음수인 항이 번갈아 나타나는 무한급수이다. 이러한 무한급수를 교대급수라고 부른다. 즉 무한급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \cdots ㉠$$

이 임의의 자연수 n에 대하여 $a_n a_{n+1} < 0$을 만족시킬 때, 위 무한급수를 **교대급수**(alternating series)라고 부른다.

만약 교대급수 ㉠의 첫 번째 항이 양수라면 모든 항이 양수인 수열 $\{c_n\}$을 생각하여 ㉠을

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n \qquad \cdots ㉡$$

과 같이 나타낼 수 있다. 교대급수의 수렴, 발산을 따질 때 첫째항의 부호는 중요하지 않으므로, 우리는 이 단원을 마칠 때까지 모든 항이 양수인 수열 $\{c_n\}$을 사용하여 만든 ㉡과 같은 꼴의 교대급수를 살펴보자.

교대급수는 언제 수렴할까?

명백히

$$+1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + - \cdots$$

와 같은 교대급수는 발산한다. 왜냐하면 일반항이 0에 수렴하지 않기 때문이다.

또한

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2^4}+-\cdots \qquad \cdots ㉢$$

과 같은 교대급수는 일반항이 0에 수렴하지만 발산한다. 이 무한급수의 홀수 번째 항만 모아서 만든 무한급수는

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

이므로 양의 무한대로 발산하고, 짝수 번째 항만 모아서 만든 무한급수는 공비의 절댓값이 1보다 작은 무한등비급수이므로 수렴한다. 그러므로 무한급수 ㉢의 부분합은 위로 유계가 아니며, 따라서 무한급수 ㉢은 발산한다.

교대급수에 일반항이 0에 수렴한다는 조건 외에 어떠한 조건이 추가되어야 수렴할까? 절대수렴이라는 조건은 너무 강한 조건이다. 그보다 약한 조건을 추가하여 교대급수가 수렴하도록 만드려고 한다.

수열 $\{c_n\}$의 모든 항이 양수인 수열이라고 하자. 또한 $\{c_n\}$이 **단조감소하며** 0**에 수렴**한다고 하자. 이제 교대급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}c_n$$

이 수렴함을 밝혀 보자. 위 무한급수의 부분합을 S_n이라고 하자. 즉

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}c_k$$

라고 하자. 그러면 $(c_{2k+1}-c_{2k+2})\geq 0$이므로

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)} &= S_{2n+2} \\ &= S_{2n}+(-1)^{2n+2}c_{2n+1}+(-1)^{2n+3}c_{2n+2} \\ &= S_{2n}+(c_{2n+1}-c_{2n+2}) \\ &\geq S_{2n} \end{aligned}$$

이고, $(c_{2n+2}-c_{2n+3})\geq 0$이므로

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)+1} &= S_{2n+3} \\ &= S_{2n+1}+(-1)^{2n+3}c_{2n+2}+(-1)^{2n+4}c_{2n+3} \\ &= S_{2n+1}-(c_{2n+2}-c_{2n+3}) \\ &\leq S_{2n+1} \end{aligned}$$

이다. 즉 $\{S_{2n}\}$은 단조증가수열이고 $\{S_{2n+1}\}$은 단조감소수열이다. 더욱이 임의의 자연수 n에 대하여

$$S_{2n} \leq S_{2n}+c_{2n+1} = S_{2n+1}$$

이므로 $\{S_{2n}\}$은 위로 유계이고 $\{S_{2n+1}\}$은 아래로 유계이다. 그러므로 단조수렴 정리에 의하여 두 수열 $\{S_{2n}\}$과 $\{S_{2n+1}\}$이 모두 수렴한다. 특히

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n+1}-S_{2n})=\lim_{n\to\infty}c_{2n+1}=0$$

이므로 두 수열 $\{S_{2n}\}$과 $\{S_{2n+1}\}$이 같은 값에 수렴한다. 그 극한을 S라고 하자.

부분합 $\{S_n\}$의 짝수 번째 항과 홀수 번째 항이 모두 같은 값 S에 수렴하므로, $\{S_n\}$도 S에 수렴한다.

지금까지 살펴본 내용을 정리하면 다음과 같다.

정리 4. 교대급수 판정법 (alternating series test)
수열 $\{c_n\}$이 단조이면서 0에 수렴하면,59) 무한급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}c_n$$

이 수렴한다.

보기 4. 다음 두 무한급수를 살펴보자.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

교대급수 판정법을 사용하면 두 무한급수가 모두 수렴한다는 사실을 쉽게 확인할 수 있다.

한편 두 무한급수는 절대수렴하지 않는다. 즉 두 무한급수는 조건수렴한다.

보기 5. 다음 무한급수가 수렴하도록 하는 x의 값의 범위를 구해 보자.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

우선 $x=0$일 때 문제의 무한급수가 명백히 수렴한다. 그러므로 $x\neq 0$이라고 하자.

$a_n=\dfrac{x^n}{n}$으로 두고 비 판정법을 사용하자.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}|x|=|x|$$

이므로, $|x|<1$일 때 문제의 무한급수가 절대수렴하고 $|x|>1$일 때 문제의 무한급수가 발산한다.

$x=1$일 때는 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$이므로 p-급수의 판정법에 의하여 문제의 무한급수가 발산한다.

$x=-1$일 때는 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$이므로 교대급수 판정법에 의하여 문제의 무한급수가 수렴한다.

그러므로 문제의 무한급수가 수렴하도록 하는 x의 범위는 $-1\leq x<1$이다.

교대급수의 부분합의 오차를 가늠하는 방법을 살펴보자.

수열 $\{c_n\}$이 단조감소하며 0에 수렴한다고 하자. 그리고 무한급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}c_n$$

의 합을 S라고 하자. 또한 이 무한급수의 부분합을 S_n이라고 하자.

59) 만약 수열 $\{c_n\}$이 단조감소하면서 0에 수렴하면 모든 n에 대하여 $c_n\geq 0$이다. 만약 수열 $\{c_n\}$이 단조증가하면서 0에 수렴하면 모든 n에 대하여 $c_n\leq 0$이다. 그러므로 $\{c_n\}$의 모든 항의 부호가 같다는 가정은 필요하지 않다.

수열 $\{S_{2k}\}$가 단조증가하면서 S에 수렴하고, 수열 $\{S_{2k+1}\}$이 단조감소하면서 S에 수렴하므로 임의의 자연수 k에 대하여

$$S_{2k} \leq S \leq S_{2k+1}$$

이 성립한다. 즉 S_{2k}와 S의 차이는 S_{2k}과 S_{2k+1}의 차이를 넘지 않는다. 따라서

$$|S_{2k} - S| \leq |S_{2k} - S_{2k+1}| = c_{2k+1}$$

이 성립한다. 마찬가지로 임의의 자연수 k에 대하여

$$S_{2k+2} \leq S \leq S_{2k+1}$$

이므로

$$|S_{2k+1} - S| \leq |S_{2k+1} - S_{2k+2}| = c_{2k+2}$$

가 성립한다. 즉 S_n의 항번호 n이 짝수이든 홀수이든 상관없이

$$|S_n - S| \leq c_{n+1}$$

이 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

정리 5. 교대급수의 부분합의 오차의 한계 공식

수열 $\{c_n\}$이 단조감소하며 0에 수렴한다고 하자. 또한 교대급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}c_n$의 합을 S라고 하고, 부분합을 S_n이라고 하자. 그러면 임의의 자연수 n에 대하여 $|S_n - S| \leq c_{n+1}$ 즉

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}c_k - S\right| \leq c_{n+1}$$

이 성립한다.

보기 6. 정리 5를 활용하여 π의 근삿값을 구해 보자.

무한등비급수의 합 공식에 의하여, $|x| < 1$일 때 다음이 성립한다.

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + - \cdots$$

이 등식의 우변과 같이 모든 항이 x에 대한 단항식일 때, 이 무한급수가 수렴하는 구간 안쪽에서 무한급수를 항별로 미분하거나 항별로 무한급수의 역도함수를 구한 결과는 무한급수의 합을 미분하거나 합의 역도함수를 구한 결과와 같음이 알려져 있다. 이 사실을 사용하여 위 등식의 양변의 역도함수를 구하면 다음과 같다.

$$\tan^{-1}x + C = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \cdots \quad (C\text{는 상수})$$

양변에 $x = 0$을 대입하면 $C = 0$을 얻는다. 즉 $|x| < 1$일 때

$$\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \cdots$$

이다.

이 식의 양변에 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$을 대입하고, 양변에 6을 곱하면 다음 등식을 얻는다.

$$\pi=6\times\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^7+-\cdots\right\}.$$

우변의 무한급수를 사용하여 π의 값을 소수점 아래 둘째 자리까지 구하려면 몇 번째 항까지 계산해야 할까?

소수점 아래 둘째 자리까지 유효하려면 오차가 0.005보다 작아야 한다. 우변에 6이 곱해져 있으므로, 중괄호 안에 있는 무한급수의 근삿값을 오차가 $\dfrac{0.005}{6}=\dfrac{1}{1200}$보다 작도록 해야 한다. 중괄호 안에 있는 무한급수의 $(n+1)$번째 항은

$$\frac{1}{2n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2n+1}$$

이다. 교대급수의 근삿값의 오차의 한계 공식에 의하여 위 값이 $\dfrac{1}{1200}$보다 작아지도록 하는 n의 값을 구해야 하므로, 부등식

$$\frac{1}{2n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2n+1}<\frac{1}{1200}$$

을 풀어야 한다. 계산기의 도움을 받아 이 부등식을 풀면 $n\geq 4$이다. 즉 중괄호 안에 있는 무한급수의 네 번째 항까지 계산하면, π의 근삿값을 소수점 아래 둘째 자리까지 구할 수 있다. 다시 한 번 계산기의 도움을 받아 계산하면

$$6\times\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^7\right\}=3.1378528915956\cdots$$

이다. 이 결과를 소수점 아래 셋째 자리에서 반올림하면 3.14이며, 이 값은 우리가 익숙하게 사용하던 π의 근삿값과 일치한다.

3 무한급수의 재배열

항의 수가 유한일 때 합은 결합 형태나 항의 순서를 바꾸어도 결과가 바뀌지 않는다.

즉 네 개의 항의 합

$$a_1+a_2+a_3+a_4$$

는 괄호를 어디에 씌우든, 항의 순서를 어떻게 바꾸든 상관없이 계산한 결과가 같다.

하지만 무한급수의 합은 그렇지 않다. 예컨대 다음과 같은 무한급수를 살펴보자.

$$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+-\cdots$$

이 무한급수는 교대급수 판정법에 의하여 수렴한다. 이제 우리가 익숙하게 사용하던 등식의 성질을 적용하여 이 무한급수를 변형해 보자.

$$
\begin{array}{rrcccccccccccc}
 & \frac{1}{2}S = & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{6} & -\frac{1}{8} & +\frac{1}{10} & -\frac{1}{12} & +\cdots \\
+ & S = & 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3} & -\frac{1}{4}+\frac{1}{5} & -\frac{1}{6}+\frac{1}{7} & -\frac{1}{8}+\frac{1}{9} & -\frac{1}{10}+\frac{1}{11} & -\frac{1}{12}+\frac{1}{13} & -\cdots \\
\hline
 & \frac{3}{2}S = & 1+\frac{1}{3} & -\frac{1}{2}+\frac{1}{5} & +\frac{1}{7} & -\frac{1}{4}+\frac{1}{9} & +\frac{1}{11} & -\frac{1}{6}+\frac{1}{13} & +\cdots
\end{array}
$$

마지막 등식의 우변을 살펴보면 순서만 바뀌었을 뿐 무한급수 S를 이루는 항과 정확히 같은 항으로 이루어져 있음을 확인할 수 있다. 그러므로 $\frac{3}{2}S = S$라는 등식으로부터 $S=0$을 얻는다. 그러나

$$S = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\cdots$$

에서 각 괄호 안의 식이 모두 양수이므로 $S>0$이다.

이러한 일이 발생한 이유는 무한급수는 항의 순서를 바꾸면 합이 달라질 수 있기 때문이다.

하지만 무한급수가 절대수렴한다면 항의 순서를 바꾸어도 합이 달라지지 않는다. 이 사실을 증명해 보자.

정리 6. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 절대수렴하면, 이 무한급수의 항의 순서를 바꾼 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$도 절대수렴하며, 두 무한급수의 합이 같다.

증명 이 증명에서 항번호의 범위를 생략한 합 기호 $\sum$는 $\sum_{n=1}^{\infty}$를 간단하게 나타낸 것으로 약속한다.

(i) $\sum a_n$이 양항급수인 경우부터 살펴보자. 즉 $\sum a_n$이 모든 항이 0 이상인 무한급수라고 하자. 그리고 그 합을 A라고 하자. 그러면 수열 $\{a_n\}$의 항 중에서 유한 개를 택하여 더했을 때 그 값은 항상 A 이하이다.

이제 $\sum a_n$의 항의 순서를 바꾼 무한급수를 $\sum b_n$이라고 하고, $\sum b_n$의 부분합을 B_n이라고 하자. 그러면 B_n은 $\{b_n\}$의 항 중에서 유한 개를 더한 것인데, $\{b_n\}$의 항은 모두 $\{a_n\}$의 항이므로, B_n은 $\{a_n\}$의 항 중에서 유한 개를 택하여 더한 것이다. 그러므로 $B_n \le A$이다. 따라서 17단원 정리 1에 의하여 무한급수 $\sum b_n$이 수렴하며, 그 합은 A 이하이다. 즉 $\sum b_n$의 합을 B라고 했을 때 $B \le A$가 성립한다.

두 무한급수 $\sum a_n$과 $\sum b_n$의 역할을 바꾸어 생각해 보면, $\sum a_n$은 $\sum b_n$의 항의 순서를 바꾼 무한급수이다. 그런데 $\sum b_n$의 합이 B이므로 $A \le B$이다.

이로써 $B \le A$이면서 $A \le B$이므로, $A=B$이다. 즉 수렴하는 양항급수의 항의 순서를 바꾼 무한급수 또한 수렴하며, 그 합은 항의 순서를 바꾸기 전의 무한급수의 합과 같다.

(ii) 다음으로 $\sum a_n$이 양항급수가 아니지만 절대수렴하는 무한급수라고 하자. 그리고 $\sum a_n$의 합을 A라고 하자. 또한 $\sum a_n$의 항의 순서를 바꾼 무한급수를 $\sum b_n$이라고 하자.

무한급수에서 항의 순서를 바꾸더라도 항의 부호는 바뀌지 않는다. 그러므로 무한급수 $\sum b_n^+$는 무한급수 $\sum a_n^+$의 항의 순서를 바꾼 것이며, 무한급수 $\sum b_n^-$는 무한급수 $\sum a_n^-$의 항의 순서를

바꾼 것이다. 그런데 $\sum a_n$이 절대수렴하므로 $\sum a_n^+$과 $\sum a_n^-$가 모두 수렴한다. 따라서 $\sum b_n^+$와 $\sum b_n^-$가 모두 수렴하며, 결과적으로 $\sum b_n$이 절대수렴한다. 더욱이 $\sum a_n^+$와 $\sum a_n^-$가 모두 양항급수이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

이 성립한다. ■

조건수렴하는 무한급수의 항의 순서를 바꾸었을 때는 무슨 일이 벌어질까?

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 조건수렴한다고 가정하자. 그리고 다음 두 무한급수를 살펴보자.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

곰곰이 생각해 보면 두 무한급수 모두 양의 무한대로 발산한다는 사실을 알 수 있다. 왜냐하면

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k^+ - \sum_{k=1}^{n} a_k^-$$

이므로, 만약 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$이 수렴한다면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$도 수렴하고, 그렇다면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 절대수렴하기 때문이다. 즉 조건수렴하는 무한급수에 대하여 다음과 같은 정리를 얻는다.

> 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 조건수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$와 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$는 모두 양의 무한대로 발산한다.

위 정리를 사용하면 다음과 같은 놀라운 결과를 끌어낼 수 있다.

정리 7. 리만의 재배열 정리[60] (Riemann's rearrangement theorem)

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 조건수렴하고 A가 임의의 실수라면, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 항의 순서를 바꾸어 만든 무한급수 중에서 A에 수렴하는 것이 존재한다.

증명 이 증명에서 항번호의 범위를 생략한 합 기호 $\sum$는 $\sum_{n=1}^{\infty}$를 간단하게 나타낸 것으로 약속한다. A가 임의의 실수라고 하자. 조건수렴하는 무한급수 $\sum a_n$의 항의 순서를 바꾸어 A에 수렴하도록 만들어 보자.

수열 $\{a_n^+\}$의 항을 앞에서부터 더하다 보면 A보다 커지는 때가 온다. 왜냐하면 $\sum a_n^+$가 양의 무한대로 발산하기 때문이다. $\{a_n^+\}$의 항을 앞에서부터 더하다가 A보다 커지는 순간 멈추고, 그 합을 P_1이라고 하자. 이제 P_1에서 $\{a_n^-\}$의 항을 앞에서부터 빼다 보면 A보다 작아지는 때가 온다. 왜냐하면 $\sum a_n^-$가 양의 무한대로 발산하기 때문이다. P_1에서 $\{a_n^-\}$의 항을 앞에서부터 빼다가 A보다 작아지는 순간 멈추고, 그때 $\{a_n^-\}$의 앞의 항의 합을 Q_1이라고 하자.

60) 리만(Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826-1866년)은 독일의 수학자이다.

즉

$$P_1 > A \text{ 그리고 } P_1 - Q_1 < A$$

이다. 다음으로 $P_1 - Q_1$에 $\{a_n^+\}$의 남은 항을 앞에서부터 더하다 보면 A보다 커지는 순간이 오는데, 그때 멈추고 $\{a_n^+\}$의 항에서 추가로 더한 항들의 합을 P_2라고 하자. 즉

$$P_1 - Q_1 + P_2 > A$$

이다. 다음으로 $P_1 - Q_1 + P_2$에서 $\{a_n^-\}$의 남은 항을 앞에서부터 빼다 보면 A보다 작아지는 순간이 오는데, 그때 멈추고 $\{a_n^-\}$의 항에서 추가로 뺀 항들의 합을 Q_2라고 하자. 즉

$$P_1 - Q_1 + P_2 - Q_2 < A$$

이다. 이와 같은 과정을 반복하면 $\sum a_n$의 항의 순서를 바꾸어 만든 무한급수

$$P_1 - Q_1 + P_2 - Q_2 + P_3 - Q_3 + - \cdots$$

을 얻는다. 수열 $\{a_n\}$이 0에 수렴하고, 위 무한급수의 부분합과 A의 차가 a_n의 항의 크기 $|a_n|$을 넘지 않으므로 위 무한급수는 A에 수렴한다. ■

연습문제

개념에 익숙해지기 위한 문제

1. 다음 무한급수가 수렴하도록 하는 x의 값을 구하시오.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \times 5^n}$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(n+1)(n+2)}$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(\ln(n+1))^2}$ (6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+n^3}$

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n^2}$ (8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{5^n}$

2. 다음 무한급수의 합을 소수점 아래 셋째 자리까지 유효하게 구하기 위하여 계산해야 하는 항의 개수를 구하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - + \cdots$$

3. 다음 무한급수의 합을 소수점 아래 둘째 자리까지 유효하게 구하기 위하여 계산해야 하는 항의 개수를 구하시오.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}$$

개념을 다지기 위한 문제

4. 무한급수의 성질을 사용하여 다음을 보이시오.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} nr^n = \frac{r}{(1-r)^2}$ (단, $|r|<1$)

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$

5. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 조건수렴한다고 하자. 이때 다음을 보이시오.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 항의 순서를 바꾸어 양의 무한대에 발산하도록 만들 수 있다.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 항의 순서를 바꾸어 음의 무한대에 발산하도록 만들 수 있다.

실력을 향상시키기 위한 문제

6. 두 무한급수 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$의 모든 항이 양수이고, 두 무한급수가 모두 수렴한다고 하자.

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

라고 할 때 다음이 성립함을 보이시오.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

이와 같이 두 무한급수의 곱을 하나의 무한급수로 나타낸 것을 **코시 곱**(Cauchy product)이라고 부른다.

7. 두 무한급수 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$의 코시 곱은 두 무한급수가 모두 수렴하고, 두 무한급수 중 하나 이상만 절대수렴하면 코시 곱이 두 무한급수의 곱에 수렴함이 알려져 있다. 두 무한급수 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$이 모두 조건수렴할 때 두 무한급수의 코시 곱이 발산하는 예를 만들어 보시오.

열아홉 번째 이야기

테일러 급수

10단원에서 함수 f가 c에서 미분 가능할 때 $L(x)=f'(c)(x-c)+f(c)$라고 정의된 일차근사함수 L의 함숫값을 f의 함숫값의 근삿값으로 사용할 수 있음을 보았다. 함수 f가 점 c에서 여러 번 미분 가능할 때는 오차가 더 작은 f의 근사다항함수를 만들 수 있다. 더욱이 f가 점 c에서 임의의 횟수로 미분 가능하고 추가적인 조건을 만족시킨다면 점 c의 근방에서 f와 함숫값이 일치하도록 하는 무한급수를 만들 수 있다.

이 단원에서는 임의의 횟수로 미분 가능한 함수를 무한급수로 나타내는 방법을 살펴보자.

1 테일러 다항식

함수 f가 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분 가능하다고 하자. $c\in(a,\ b)$일 때, 구간 $(a,\ b)$에서 함수 L을

$$L(x)=f(c)+f'(c)(x-c)$$

라고 정의하면 $L(c)=f(c)$이고 $L'(c)=f'(c)$이다.

이때 함수 L은 c 근처에서 함수 f의 근사함수이다. 왜냐하면 미분 가능한 함수의 그래프는 가까이서 보면 직선에 가깝기 때문이다. 이와 같은 관점에서 L을 c에서 f의 일차근사함수라고 부른다.

만약 함수 f가 열린구간 $(a,\ b)$에서 n번 이상 미분 가능하고 $c\in(a,\ b)$라면, 다음 조건을 모두 만족시키는 다항함수 P_n을 구할 수 있다.

조건 1. $P_n(x)$의 차수는 n 이하이다.

조건 2. c에서 f와 P_n의 함숫값이 같다. 즉 $f(c)=P_n(c)$이다.

조건 3. c에서 f와 P_n의 1, 2, 3, $\cdots$, n계 미분계수가 같다. 즉 $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$일 때 $f^{(k)}(c)=P_n^{(k)}(c)$이다.

세 조건을 모두 만족시키는 다항함수

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-c)^1+a_2(x-c)^2+\cdots+a_n(x-c)^n$$

이 있다고 가정하고, $P_n(x)$의 상수와 계수를 구해보자.

등식 $f(c)=P_n(c)$로부터

$$a_0=f(c) \qquad \cdots ㉠$$

를 얻는다. 또한 $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$일 때

$$P_n^{(k)}(c)=k!\,a_k=f^{(k)}(c) \qquad \cdots ㉡$$

이므로

$$a_k=\frac{f^{(k)}(c)}{k!} \qquad \cdots ㉢$$

를 얻는다.

그러므로 구하는 다항함수의 식 $P_n(x)$는 다음과 같다.

$$P_n(x)=f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)^1+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \qquad \cdots ㉣$$

직접 계산해 보면 ㉣과 같이 정의된 다항함수 P_n은 우리가 바라는 세 조건을 모두 만족시킴을 알 수 있다. 또한 ㉠, ㉡, ㉢을 통해 세 조건을 모두 만족시키는 다항함수는 P_n이 유일함을 알 수 있다.

이때 다항식 $P_n(x)$를 c를 중심으로 하는 f의 n차 **테일러 다항식**(Taylor polynomial)이라고 부른다.[61]

보기 **1.** $c=0$을 중심으로 하는 $\sin x$의 테일러 다항식을 구해 보자.

$f(x)=\sin x$라고 하자. 그러면

$$\begin{aligned} f'(x)&=\cos x,\\ f''(x)&=-\sin x,\\ f^{(3)}(x)&=-\cos x,\\ f^{(4)}(x)&=\sin x,\\ &\vdots \end{aligned}$$

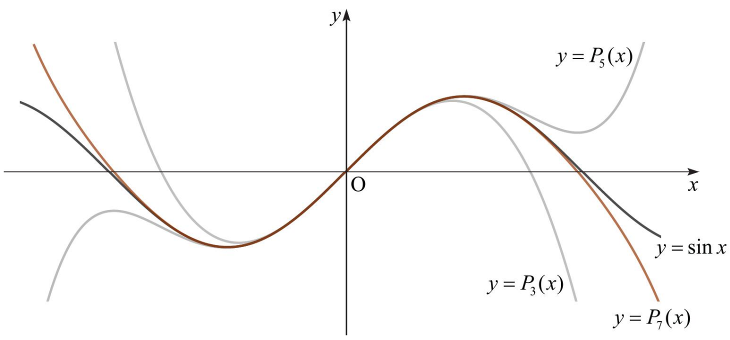
이고

$$\begin{aligned} f'(0)&=1,\\ f''(0)&=0,\\ f^{(3)}(0)&=-1,\\ f^{(4)}(0)&=0,\\ &\vdots \end{aligned}$$

이다. 그러므로 구하는 테일러 다항식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P_{2n+1}(x)&=0+\frac{1}{1!}x^1+\frac{0}{2!}x^2+\frac{-1}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\\ &=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}. \end{aligned}$$

$n=3,\ 5,\ 7$일 때 $y=P_n(x)$의 그래프는 다음과 같다.



테일러 다항식이 미분 가능한 함수의 근사함수 역할을 하므로, 오차의 한계를 가늠하는 도구가 있어야 할 것이다.

61) 테일러(Brook Taylor, 1685-1731)는 영국의 수학자이다.

함수 f가 닫힌구간 $[c,\ x]$에서 연속이고 열린구간 $(c,\ x)$에서 미분 가능하다고 하자. 이때 평균값 정리에 의하여

$$f(x)=f(c)+f'(x_1)(x-c)$$

를 만족시키는 점 x_1이 c와 x 사이에 존재한다. 이 등식의 우변은 중심이 c인 1차 테일러 다항식과 유사하다. 단, $f'(c)$ 대신 $f'(x_1)$이 있다는 점만 다르다.

이 공식을 일반화할 수 있을까? 즉 함수 f가 닫힌구간 $[c,\ x]$에서 연속이고 열린구간 $(c,\ x)$에서 $(n+1)$번 미분 가능할 때,

$$\begin{aligned} f(x)=f(c)&+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \\ &+\frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \end{aligned}$$

을 만족시키는 점 x_{n+1}이 x와 c 사이에 존재할까?

다음 정리는 이 질문에 대한 답을 제공한다.

정리 1. 라그랑주의 나머지항 정리[62] (Lagrange's form of remainder)

함수 f가 구간 $(a,\ b)$에서 $(n+1)$번 미분 가능하고 $c\in(a,\ b)$라고 하자. c를 중심으로 하는 f의 n차 테일러 다항식을 $P_n(x)$라고 하자. 그러면 c가 아닌 임의의 $x\in(a,\ b)$에 대하여 c와 x 사이에 x_{n+1}이 존재하여 다음 등식을 만족시킨다.

$$f(x)=P_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}.$$

증명 $c<x$인 경우를 증명하자. 구간 $[c,\ x]$에서 함수 R와 g를 다음과 같이 정의하자.

$$R(t)=f(t)-P_n(t),\quad g(t)=(t-c)^{n+1}.$$

그러면 두 함수 R와 g는 닫힌구간 $[c,\ x]$에서 연속이고 열린구간 $(c,\ x)$에서 미분 가능하며, 임의의 $t\in(c,\ x)$에 대하여 $g(t)\neq 0$이다. 그러므로 코시 평균값 정리에 의하여 c와 x 사이에 x_1이 존재하여 다음을 만족시킨다.

$$\frac{R(x)}{g(x)}=\frac{R(x)-R(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{R'(x_1)}{g'(x_1)}=\frac{R'(x_1)}{(n+1)(x_1-c)^n}.$$

두 함수 R'과 g'이 닫힌구간 $[c,\ x_1]$에서 코시 평균값 정리를 사용하기 위해 필요한 조건을 만족시키므로, 다시 코시 평균값 정리에 의하여 c와 x_1 사이에 x_2가 존재하여 다음을 만족시킨다.

$$\frac{R'(x_1)}{g'(x_1)}=\frac{R'(x_1)-R'(0)}{g'(x_1)-g'(0)}=\frac{R''(x_2)}{g''(x_2)}=\frac{R''(x_2)}{(n+1)n(x_2-c)^{n-1}}.$$

이와 같이 코시 평균값 정리를 적용하는 과정을 $(n-1)$번 더 반복하면

$$c<x_{n+1}<x_n<x_{n-1}<\cdots<x_2<x_1<x$$

인 점 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_{n+1}$이 존재하여 다음을 만족시킴을 알 수 있다.

$$\frac{R(x)}{g(x)}=\frac{R'(x_1)}{g'(x_1)}=\frac{R''(x_2)}{g''(x_2)}=\cdots=\frac{R^{(n+1)}(x_{n+1})}{g^{(n+1)}(x_{n+1})}.$$

62) 라그랑주(Joseph-Louis Lagrange, 1736-1813)는 이탈리아에서 태어나고 프랑스에서 활동한 수학자이자 천문학자이다.

즉

$$R(x)=g(x)\frac{R^{(n+1)}(x_{n+1})}{g^{(n+1)}(x_{n+1})}$$

이므로

$$f(x)-P_n(x)=(x-c)^{n+1}\times\frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!}$$

이며, 이 식을 정리하면 바라는 등식을 얻는다.

$x<c$인 경우에도 비슷한 과정을 통해 같은 결론을 얻는다. ■

보기 2. $c=0$ 근처에서 $\sin x$의 테일러 다항식의 오차의 한계를 구하고, $\sin 1$의 값을 소수점 아래 둘째 자리까지 유효하도록 구해 보자.

보기 1에서 구한 $\sin x$의 $(2n+1)$차 테일러 다항식은 다음과 같다.

$$P_{2n+1}(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

$f(x)=\sin x$라고 두고 $\sin x$와 테일러 다항식 $P_{2n+1}(x)$의 차를

$$R_{2n+1}(x)=f(x)-P_{2n+1}(x)$$

라고 하자.

$x=0$일 때는 명백히 $R_{2n+1}(0)=f(0)-P_{2n+1}(0)=0$이다.

$x\neq 0$일 때는 라그랑주 나머지항 정리에 의하여

$$R_{2n+1}(x)=\frac{f^{(2n+2)}(x_{2n+2})}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$

을 만족시키는 점 x_{2n+2}가 0과 x 사이에 존재한다. 그런데 임의의 n에 대하여 $\sin x$의 n계 미분계수의 절댓값은 1을 넘지 않으므로 다음 부등식이 성립한다.

$$|R_{2n+1}(x)|\le\frac{1}{(2n+2)!}|x|^{2n+2}$$

$\sin 1$의 값을 소수점 아래 둘째 자리까지 구하고 싶다면 $x=1$일 때 오차의 한계가 0.005 미만이 되도록 n의 값을 정하면 되므로

$$\frac{1}{(2n+2)!}\times 1^{2n+2}<\frac{5}{1000}$$

인 n을 구하면 된다. $n\ge 2$이면 이 부등식이 성립한다. $n=2$로 두고 $\sin x$의 테일러 다항식

$$P_{2n+1}(x)=P_5(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$$

에 $x=1$을 대입하면

$$P_5(1)=0.8416666\cdots$$

을 얻으며, 이 값을 소수점 아래 셋째 자리에서 반올림하면 $\sin 1$의 근삿값으로 0.84를 얻는다.

$\sin 1$의 참값이

$$\sin 1=0.841470984807897\cdots$$

이므로, 우리가 구한 근삿값은 충분히 좋은 근삿값이다.

2 테일러 급수

함수 f가 $f(x)=e^x$이라고 정의되어 있다고 하자. 그러면 f는 실수 전체 구간에서 임의의 횟수로 미분 가능하다. 그러므로 n이 임의의 자연수일 때, 0을 중심으로 하는 f의 테일러 다항식 $P_n(x)$를 구할 수 있다.

즉 $f(x)=e^x$일 때, $f(0)=1$이고 임의의 자연수 n에 대하여

$$f^{(n)}(x)=e^x, \quad f^{(n)}(0)=1$$

이므로, f의 n차 테일러 다항식 $P_n(x)$는 다음과 같다.

$$P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}.$$

만약 이 식에 $n\to\infty$인 극한을 취하여 무한급수를 만든다면, 그 무한급수는 e^x에 수렴할까? 즉 임의의 실수 x에 대하여

$$e^x=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

이 성립할까? 라그랑주의 나머지항 정리를 사용하면 이 사실을 증명할 수 있다. 다음 예를 살펴보자.

보기 3. 함수 f가 $f(x)=e^x$이라고 정의되어 있을 때 f의 n차 테일러 다항식은 다음과 같다.

$$P_n(x)=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

이제 x가 0이 아닌 임의의 실수라고 하자. 그러면 라그랑주의 나머지항 정리에 의하여 0과 x 사이에 실수 x_{n+1}이 존재하여 다음을 만족시킨다.

$$f(x)=P_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

여기서

$$\left|f^{(n+1)}(x_{n+1})\right|=e^{x_{n+1}}\le e^{|x_{n+1}|}\le e^{|x|}$$

이므로

$$|f(x)-P_n(x)|\le\frac{e^{|x|}\,|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

이다. 그런데 $n\to\infty$일 때 위 부등식의 우변이 0에 수렴하므로, 부등식의 좌변도 0에 수렴한다. 즉

$$\lim_{n\to\infty}P_n(x)=f(x)$$

이므로

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$$

이다. 만약 $x=0$이라면 위 등식은 자명하게 성립한다. 그러므로 임의의 실수 x에 대하여 위 등식이 성립한다.

보기 3의 결과에 의하여, 지수함수 e^x은 다음과 같이 무한급수로 나타낼 수 있다.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \quad (x\text{는 임의의 실수})$$

여기서 우변은 e^x의 n차 테일러 다항식 $P_n(x)$에 $n \to \infty$인 극한을 취하여 얻은 것이다.

이와 같이 함수 f가 점 c를 원소로 갖는 한 열린구간에서 임의의 횟수로 미분 가능할 때 c를 중심으로 하는 f의 n차 테일러 다항식에 $n \to \infty$인 극한을 취하여 얻은 무한급수

$$f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c)^1 + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \cdots$$

을 **점 c를 중심으로 하는 f의 테일러 급수**(Taylor series)라고 부른다. 특히 중심이 0인 테일러 급수를 **맥클로런 급수**(Maclaurin series)라고 부른다.[63]

점 c를 중심으로 하는 f의 테일러 급수를 형식적으로 다음과 같이 나타낸다.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

여기서 $n=0$이고 $x=c$일 때 $(x-c)^n$이 0^0 꼴이 되므로 식의 값이 정의되지 않는다. 그러나 위와 같은 꼴의 무한급수를 나타낼 때는 편의상 0^0을 1로 계산하는 것으로 약속한다. 즉

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(c) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

으로 계산한다.

보기 4. 사인의 테일러 급수를 구해 보자. $f(x) = \sin x$일 때 **보기** 1에서 구한 테일러 다항식은 다음과 같다.

$$P_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

여기에 $n \to \infty$인 극한을 취하면 구하는 테일러 급수는 다음과 같다.

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots.$$

이 무한급수가 $\sin x$와 같은 함수일까? 즉 임의의 실수 x에 대하여 위 무한급수가 $\sin x$에 수렴할까? 이 사실을 밝혀 보자.

$\sin x$와 테일러 다항식 $P_{2n+1}(x)$의 오차를

$$R_{2n+1}(x) = f(x) - P_{2n+1}(x)$$

라고 하자. **보기** 2에서 다음 부등식이 성립함을 밝혔다.

$$|R_{2n+1}(x)| \le \frac{1}{(2n+2)!}|x|^{2n+2}$$

이때 임의의 실수 x에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} = 0$$

이므로 다음이 성립한다.

---

63) 맥클로런(Colin Maclaurin, 1698-1746)은 영국의 수학자이다.

$$\lim_{n\to\infty} P_{2n+1}(x) = f(x).$$

즉 임의의 실수 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \cdots.$$

보기 4에서 보다시피 점 c를 중심으로 하는 함수 f의 테일러 급수를 구하는 것과, 그 테일러 급수가 f에 수렴함을 밝히는 것은 다른 문제이다. 점 c를 중심으로 하는 f의 테일러 급수를 구하면 그 무한급수는 모든 실수 x에 대하여 f에 수렴할 수도 있고 일부 x에 대해서만 f에 수렴할 수도 있으며 $x = c$일 때만 f에 수렴할 수도 있다. 이어지는 두 예를 통해 이 사실을 확인하자.

보기 5. 함수 f가 $f(x) = \ln(1+x),\ x > -1$이라고 정의되어 있을 때 f의 맥클로린 급수를 구해 보자.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1+x), & f(0) &= 0,\\
f'(x) &= (1+x)^{-1}, & f'(0) &= 1,\\
f^{(2)}(x) &= -(1+x)^{-2}, & f^{(2)}(0) &= -1,\\
f^{(3)}(x) &= 2(1+x)^{-3}, & f^{(3)}(0) &= 2,\\
f^{(4)}(x) &= -3!(1+x)^{-4}, & f^{(4)}(0) &= -3!,\\
f^{(5)}(x) &= 4!(1+x)^{-5}, & f^{(5)}(0) &= 4!,\\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}$$

이므로 f의 맥클로린 급수는 다음과 같다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots.$$

$0 \le x \le 1$일 때 이 무한급수가 $\ln(1+x)$에 수렴함을 보이자.

$x = 0$일 때는 이 무한급수가 자명하게 $\ln(1+x)$에 수렴한다.

$0 < x \le 1$인 경우 라그랑주의 나머지항 정리에 의하여 0과 x 사이에 점 x_{n+1}이 존재하여 다음을 만족시킨다.

$$\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+x_{n+1})^{n+1}}.$$

이 등식의 우변을 $R_n(x)$라고 두면

$$|R_n(x)| = \frac{1}{n+1} \times \left| \frac{x}{1+x_{n+1}} \right|^{n+1} \le \frac{1}{n+1} \times 1^{n+1} = \frac{1}{n+1} \qquad \cdots ㉤$$

이다. $n \to \infty$일 때 부등식의 우변이 0에 수렴하므로 $R_n(x) \to 0$이다.

그러므로 $0 < x \le 1$일 때 다음 등식이 성립한다.

$$\ln(1+x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}. \qquad \cdots ㉥$$

㉥의 우변의 무한급수는 $-1 < x \le 1$일 때 수렴하고 그 외의 범위에서는 발산한다.

그렇다면 $-1<x<0$일 때도 ㉥의 우변의 무한급수의 합이 $\ln(1+x)$와 일치할까? 이것은 라그랑주의 나머지항 정리만으로는 밝힐 수 없다. 왜냐하면 x가 -1에 가까울 때 ㉤의 부등식의 좌변에 있는 나머지항 $R_n(x)$가 0에 수렴함을 밝힐 수 없기 때문이다.

다음 단원에서 거듭제곱급수의 성질을 살펴본 후에는 $-1<x<0$의 범위에서도 등식 ㉥이 성립함을 밝힐 수 있다.

이로써 현 시점에서 우리는 $0\le x\le 1$의 범위를 포함하고 $-1<x\le 1$의 범위에 포함되는 범위에서 $\ln(1+x)$의 맥클로런 급수가 $\ln(1+x)$에 수렴함을 밝혔다.

보기 6. 함수 f를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{if } x\neq 0, \\ 0 & \text{if } x=0. \end{cases}$$

그러면 $f(0)=0$이며, f가 모든 점에서 임의의 횟수로 미분 가능하고 임의의 자연수 n에 대하여 $f^{(n)}(0)=0$이다(9단원의 연습문제). 즉 0을 중심으로 하는 f의 테일러 급수는 다음과 같다.

$$0+\frac{0}{1!}x^1+\frac{0}{2!}x^2+\frac{0}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+\cdots$$

명백히 이 무한급수는 임의의 x에 대하여 0에 수렴한다. 그런데 $x\neq 0$일 때 $f(x)\neq 0$이다. 그러므로 0을 중심으로 하는 f의 테일러 급수는 $x=0$일 때만 $f(x)$에 수렴한다.

연습문제

1. 다음과 같이 정의된 함수 f의 맥클로런 급수를 구하시오.
   (1) $f(x)=3x^2-x+4$
   (2) $f(x)=e^{-x}$
   (3) $f(x)=\ln(1-x)$
   (4) $f(x)=\cos x$
   (5) $f(x)=\sinh x$
   (6) $f(x)=\cosh x$
   (7) $f(x)=3^x$
   (8) $f(x)=\tan^{-1}x$

2. 0에 가까운 값 x에 대하여 $\cos x$의 근삿값으로

$$P(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$$

   을 사용하려고 한다. 라그랑주의 나머지항 정리를 사용하여 $P(x)$의 값이 소수점 아래 넷째 자리까지 유효하도록 하는 x의 값의 범위를 구하시오.

3. 함수 f의 n차 테일러 다항식의 차수가 n보다 작을 수 있는가?

4. 지수함수의 테일러 급수를 사용하여 $e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$임을 보이시오.

5. 테일러 다항식에 대한 **코시의 나머지항**(Cauchy's form of remainder)을 조사해 보자.

6. 테일러 다항식에 대한 **나머지항의 적분 표현**(integral form of remainder)을 조사해 보자.

스무 번째 이야기

테일러 급수의 성질

뉴턴64)은 미적분학 이론을 연구하던 중 무한급수도 유한 다항식과 거의 마찬가지로 다룰 수 있다는 사실을 발견하였다. 즉 무한급수는 함수의 근사일 뿐만 아니라 함수와 동등한 것이다. 오늘날 무한급수는 복잡한 함수를 분석하는 도구로 유용하게 사용되고 있다.

이 단원에서는 테일러 급수의 성질과 테일러 급수를 활용하여 문제를 해결하는 예를 살펴보자.

1 거듭제곱급수의 성질

19단원의 보기 5에서 함수 $\ln(1+x)$의 맥클로런 급수

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+-\cdots \qquad \cdots ㉠$$

을 구하였으며 라그랑주 나머지항 정리를 사용하여 이 무한급수가 $0 \le x \le 1$인 범위에서 $\ln(1+x)$에 수렴함을 확인했다. 하지만 $-1<x<0$인 범위에서는 이 무한급수가 $\ln(1+x)$에 수렴한다는 사실을 확인하지 못했다.

이 사실을 다른 방법으로 확인해 보자.

보기 1. 다음과 같은 등식을 살펴보자.

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+-\cdots. \qquad \cdots ㉡$$

무한등비급수의 합 공식에 의하여, $|x|<1$일 때 위 등식이 성립한다. 양변의 역도함수를 구하면

$$\ln(1+x)+C=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+-\cdots$$

이다. $x=0$을 대입하면 $\ln(1)=0$이고 우변의 무한급수의 합이 0이므로 $C=0$을 얻는다.
즉 $|x|<1$일 때 다음 등식이 성립한다.

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+-\cdots \qquad \cdots ㉢$$

여기서 한 가지 의문이 생긴다. ㉡의 우변의 무한급수의 합이 좌변과 같을 때, 우변의 역도함수를 '항별로' 계산한 결과가 좌변의 역도함수를 계산한 결과와 같을까? 즉 ㉡의 우변의 n차항까지의 부분합을 $P_n(x)$라고 할 때

$$\int\Big(\lim_{n\to\infty}P_n(x)\Big)dx=\lim_{n\to\infty}\Big(\int P_n(x)\,dx\Big)$$

가 성립할까?

이 의문에 대한 답을 얻기 위하여 거듭제곱급수의 개념을 도입하고, 거듭제곱급수의 수렴구간의 특징과 거듭제곱급수의 미분, 적분과 관련된 성질을 살펴보자.

---

64) Isaac Newton, 1643-1727년, 영국의 수학자이자 물리학자이자 천문학자이다.

함수 f가 c에서 임의의 횟수로 미분 가능할 때, c를 중심으로 하는 f의 테일러 급수

$$f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)^1+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+\cdots$$

은 마치 '거대한' 다항식처럼 보인다. 일반적으로, a_0, a_1, a_2, a_3, $\cdots$이 상수일 때

$$a_0+a_1(x-c)^1+a_2(x-c)^2+a_3(x-c)^3+\cdots$$

의 꼴로 나타나는 무한급수를 **중심이 c인 거듭제곱급수**(power series) 또는 **중심이 c인 멱급수**라고 부르고

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

과 같이 나타낸다. 만약 $t=x-c$라고 하면 위 거듭제곱급수는

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

과 같이 중심이 0인 거듭제곱급수로 나타낼 수 있다. 그러므로 거듭제곱급수의 수렴, 발산과 관련된 성질을 밝힐 때는 중심이 0인 거듭제곱급수만 살펴봐도 충분하다.

중심이 c인 거듭제곱급수는 실수 전체 구간에서 수렴할 수도 있고 $x=c$에서만 수렴할 수도 있으며 길이가 양수인 적당한 구간에서만 수렴할 수도 있다. 그렇다면 거듭제곱급수가 수렴하도록 하는 점들의 집합은 어떠한 특징을 가지고 있을까?

정리 1. 거듭제곱급수

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

에 대하여 다음이 성립한다.

(1) 만약 $x=x_0$일 때 거듭제곱급수가 수렴하면 $|x|<|x_0|$인 임의의 x에 대하여 거듭제곱급수가 수렴한다.

(2) 만약 $x=x_0$일 때 거듭제곱급수가 발산하면 $|x|>|x_0|$인 임의의 x에 대하여 거듭제곱급수가 발산한다.

증명 (1) $x_0 \neq 0$일 때만 증명하면 충분하다.

$x=x_0$일 때 거듭제곱급수가 수렴한다고 가정하자. 그러면 수열 $\{a_n x_0{}^n\}$은 0에 수렴한다.

그러므로 [모든 자연수 n에 대하여 $|a_n x_0{}^n|<M$]을 만족시키는 양수 M이 존재한다.

이제 $|x|<|x_0|$인 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$|a_n x^n| = |a_n x_0{}^n|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

이때 무한급수

$$\sum_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

은 공비의 절댓값이 1보다 작은 무한등비급수이므로 수렴한다. 그러므로 비교 판정법에 의하여

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$$

이 수렴한다. 따라서 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$이 절대수렴한다.

(2) $x=x_0$일 때 거듭제곱급수가 발산한다고 가정하자. 만약 $|x|>|x_0|$이면서 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$이 수렴하도록 하는 x가 존재한다면, (1)에 의하여 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n {x_0}^n$도 수렴해야 한다. 이것은 모순이므로 $|x|>|x_0|$인 모든 x에 대하여 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$이 발산한다. ■

정리 1에 따르면 중심이 0인 거듭제곱급수가 수렴하는 점의 집합은 $\{0\}$이거나 $\mathbb{R}$이거나 또는 0을 중심으로 하는 구간이어야 한다. 세 번째 경우의 구간은 $(-R,\ R)$, $[-R,\ R)$, $(-R,\ R]$, $[-R,\ R]$와 같이 구간의 끝점을 모두 가지고 있을 수도 있고 하나만 가지고 있을 수도 있으며, 갖지 않을 수도 있다. 이 성질을 중심이 c인 거듭제곱급수에 적용하면 다음과 같다.

정리 2. 거듭제곱급수

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

이 수렴하도록 하는 x의 집합을 I라고 하자. 그러면 다음 셋 중 하나가 성립한다.

(1) $I=\{c\}$이다. 즉 $x=c$일 때만 무한급수가 수렴한다. 이때 거듭제곱급수의 **수렴반지름**(radius of convergence)을 0이라고 정의한다.

(2) $I=\mathbb{R}$이다. 즉 임의의 x에 대하여 무한급수가 수렴한다. 이때 거듭제곱급수의 **수렴반지름**을 ∞라고 정의한다.

(3) I가 중심이 c이고 길이가 양수인 구간

$$(c-R,\ c+R),\ \ [c-R,\ c+R),\ \ (c-R,\ c+R],\ \ [c-R,\ c+R]$$

중 한 가지 형태이다. 이때 거듭제곱급수의 **수렴반지름**을 R라고 정의한다.

위 정리에서 집합 I를 거듭제곱급수의 **수렴구간**(interval of convergence)이라고 부른다.

보기 2. 다음 거듭제곱급수의 수렴구간을 구해 보자.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

$x=0$일 때 이 무한급수가 수렴함은 자명하다.

$x\neq 0$일 때를 생각하자. $c_n=\dfrac{x^n}{n^2}$이라고 두고 비 판정법을 사용하자.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|n^2}{(n+1)^2} = |x|$$

이므로 $|x|<1$일 때 무한급수가 수렴하고 $|x|>1$일 때 무한급수가 발산한다. 즉 문제의 거듭제곱급수의 수렴반지름이 1이다.

한편 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$이 수렴하므로, $x=1$ 또는 $x=-1$일 때 문제의 거듭제곱급수는 절대수렴한다.

그러므로 수렴구간은 닫힌구간 $[-1,\ 1]$이다.

보기 3. 다음 거듭제곱급수의 수렴구간을 구해 보자.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$$

$c_n = \dfrac{x^n}{3^n}$이라고 두고 제곱근 판정법을 사용하자.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{3} = \frac{|x|}{3}$$

이므로 $|x| < 3$일 때 무한급수가 수렴하고 $|x| > 3$일 때 무한급수가 발산한다. 즉 문제의 거듭제곱급수의 수렴반지름이 3이다.

한편 $x = 1$ 또는 $x = -1$일 때 $\{c_n\}$이 0에 수렴하지 않으므로 문제의 거듭제곱급수가 발산한다. 그러므로 수렴구간은 열린구간 $(-3,\ 3)$이다.

보기 4. 다음 거듭제곱급수의 수렴구간을 구해 보자.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$x = 1$일 때 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$이 발산하고 $x = -1$일 때 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$이 수렴한다.

그러므로 문제의 거듭제곱급수의 수렴반지름은 1이며, 수렴구간은 반닫힌구간 $[-1,\ 1)$이다.

거듭제곱급수로 표현된 함수의 연속성, 미분, 적분과 관련하여 다음이 성립한다.

정리 3. 거듭제곱급수

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

의 수렴반지름이 R이고, $R > 0$이라고 하자. 또한 이 거듭제곱급수의 수렴구간을 I라고 하자. 이때 다음이 성립한다.

(1) 구간 I에서

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

이라고 정의하면 f는 I에서 연속인 함수이다.

(2) (1)에서 정의한 함수 f는 열린구간 $(c-R,\ c+R)$에서 미분 가능하며 f의 도함수는 다음과 같다.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}$$

이 등식의 우변의 거듭제곱급수는 열린구간 $(c-R,\ c+R)$에서 수렴한다.

(3) (1)에서 정의한 함수 f의 역도함수는 다음과 같다.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1} + C \quad (C\text{는 상수})$$

이 거듭제곱급수는 열린구간 $(c-R,\ c+R)$에서 수렴한다.

이제 비로소 정리 3에 의하여 보기 1에서 살펴본 등식

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+-\cdots$$

이 $-1<x\le 1$인 모든 x에 대하여 성립함을 확신할 수 있다.

보기 5. 무한등비급수의 합 공식에 의하여 $|x|<1$일 때 다음이 성립한다.

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-x^{10}+-\cdots.$$

양변의 역도함수를 구하면

$$\tan^{-1}x+C=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{11}}{11}+-\cdots \quad (C\text{는 상수})$$

이며, 이 식에 $x=0$을 대입하면 $C=0$을 얻는다. 그러므로 $|x|<1$일 때 다음 등식을 얻는다.

$$\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{11}}{11}+-\cdots.$$

이 등식의 우변은 거듭제곱급수이며 수렴구간은 $[-1,\ 1]$이다. 그러므로 우변의 식은 $[-1,\ 1]$에서 연속인 함수가 된다. 그런데 좌변의 $\tan^{-1}x$ 또한 $[-1,\ 1]$에서 연속이다. 따라서 $x=1$일 때도 등식이 성립한다. 즉 다음이 성립한다.

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}1=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+-\cdots$$

이 공식을 **라이프니츠의 원주율 공식**(Leibniz formula for pi)이라고 부른다.

2 거듭제곱급수로 표현되는 함수

함수 f가 중심이 c인 거듭제곱급수

$$f(x)=a_0+a_1(x-c)^1+a_2(x-c)^2+a_3(x-c)^3+\cdots \qquad \cdots ㉣$$

으로 표현된다고 하자. 특히 길이가 양수인 구간 $(c-R,\ c+R)$의 모든 점 x에서 위 등식이 성립한다고 하자. 그렇다면 f의 거듭제곱급수 표현에서 상수 a_0과 계수 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$을 어떻게 구할까? 그것은 테일러 다항식의 상수와 계수를 구한 방법과 같다.

먼저 ㉣의 양변에 $x=c$를 대입하면 $a_0=f(c)$를 얻는다. 다음으로 ㉣의 양변을 미분하여 얻은 식

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-c)^1+3a_3(x-c)^2+4a_4(x-c)^3+\cdots$$

에 $x=c$를 대입하면 $a_1=f'(c)$를 얻는다. 다시 이 식의 양변을 미분하여 얻은 식

$$f''(x)=2a_2+2\times 3a_3(x-c)+3\times 4a_4(x-c)^2+4\times 5a_5(x-c)^3+\cdots$$

에 $x=c$를 대입하면 $2a_2=f''(c)$ 즉

$$a_2=\frac{f''(c)}{2}$$

를 얻는다.

이와 같은 과정을 반복하면 임의의 자연수 n에 대하여

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

를 얻는다. 즉 함수 f를 중심이 c이고 수렴반지름이 양수인 거듭제곱급수로 나타낼 수 있다면, 그러한 거듭제곱급수 표현은 중심이 c인 f의 테일러 급수와 일치한다. 그러므로 길이가 양수인 구간에서 정의된 함수를 거듭제곱급수로 표현하는 것은 곧 그 함수의 테일러 급수를 구하는 것과 같다.

하지만 임의의 횟수로 미분 가능한 함수가 항상 테일러 급수로 표현되는 것은 아니다. 예컨대 19단원 **보기 6**의 함수를 다시 살펴보자.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{if } x \neq 0, \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

이 함수 f의 맥클로린 급수는 모든 항이 0인 무한급수이다. 따라서 함수 f는 길이가 양수인 구간에서 중심이 0인 테일러 급수로 나타낼 수 없다.

함수 f가 점 c에서 임의의 횟수로 미분 가능하고, 중심이 c이고 수렴반지름이 양수인 f의 테일러 급수가 존재하며, 그 테일러 급수가 c를 원소로 갖는 한 열린구간에서 f에 수렴할 때, "함수 f가 c에서 **해석적**이다."라고 말한다. 또한 정의역의 모든 점에서 해석적인 함수를 **해석적 함수**(analytic function)라고 부른다.

I가 길이가 양수인 구간일 때, I에서 해석적인 함수의 모임을 $C^{\omega}(I)$와 같이 나타낸다. 연속인 함수, 미분 가능한 함수, 해석적 함수 사이에 다음과 같은 관계가 있다.

$$C(I) \supsetneq D(I) \supsetneq C^1(I) \supsetneq D^2(I) \supsetneq C^2(I) \supsetneq D^3(I) \supsetneq \cdots \supsetneq C^{\infty}(I) \supsetneq C^{\omega}(I).$$

자주 사용하는 해석적 함수의 테일러 급수 표현은 다음과 같다.

자주 사용하는 해석적 함수의 테일러 급수 표현

- $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $\qquad |x| < 1$
- $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + - \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ $\qquad |x| < 1$
- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ $\qquad |x| < \infty$
- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + - \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\qquad |x| < \infty$
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + - \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ $\qquad |x| < \infty$
- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + - \cdots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$ $\qquad -1 < x \leq 1$
- $\tan^{-1} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + - \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ $\qquad |x| \leq 1$

테일러 급수의 유일성을 사용하면 미분을 하지 않고서도 함수의 테일러 급수 표현을 구할 수 있다. 다음 예를 보자.

보기 6. 함수 g가

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

이라고 정의되어 있을 때 중심이 1인 g의 테일러 급수를 구해 보자.

무한등비급수의 합 공식에 의하여, $|t| < 1$일 때 다음이 성립한다.

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + - \cdots.$$

이 식을 활용하여 중심이 1인 g의 테일러 급수를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1+(x-1)} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 - (x-1)^5 + - \cdots.$$

$0 < x < 2$일 때 등식의 우변의 무한급수가 좌변에 수렴한다.

거듭제곱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$의 수렴반지름이 R이고 f가 연속함수라면 $|f(x)| < R$인 x에 대하여 무한급수 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (f(x))^n$이 절대수렴한다. 특히 f가 단항함수라면 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (f(x))^n$은 그 자체로 거듭제곱급수가 된다. 다음 예를 보자.

보기 7. 다음과 같이 정의된 함수 f의 맥클로린 급수를 구해 보자.

$$f(x) = e^{x^2}$$

우선 임의의 실수 t에 대하여 다음이 성립한다.

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots.$$

여기에 $t = x^2$을 대입하면 다음을 얻는다.

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \cdots.$$

임의의 실수 x에 대하여 우변의 무한급수가 좌변에 수렴한다.

무한급수의 합, 차, 곱과 관련된 성질은 거듭제곱급수에서도 그대로 사용할 수 있다. 이와 같은 성질을 활용하면 거듭제곱급수 표현이 알려진 함수의 합, 차, 곱으로 이루어진 함수의 거듭제곱급수 표현을 쉽게 구할 수 있다. 다음 예를 살펴보자.

보기 8. 다음과 같이 정의된 함수 h의 맥클로린 급수를 구해 보자.

$$h(x) = \frac{1}{2}(3x + x\sin x).$$

사인의 맥클로린 급수가

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + - \cdots$$

이므로

$$x\sin x = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \frac{x^{10}}{9!} - \frac{x^{12}}{11!} + - \cdots$$

이다. 따라서 구하는 맥클로린 급수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(3x + x\sin x) &= \frac{1}{2}\left\{3x + x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \frac{x^{10}}{9!} - \frac{x^{12}}{11!} + - \cdots\right\} \\ &= \frac{3}{2}x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2\times 3!} + \frac{x^6}{2\times 5!} - \frac{x^8}{2\times 7!} + \frac{x^{10}}{2\times 9!} - \frac{x^{12}}{2\times 11!} + - \cdots.\end{aligned}$$

등식의 마지막 무한급수는 임의의 실수 x에 대하여 $h(x)$에 수렴한다.

3 테일러 급수의 활용

함수 f가 거듭제곱급수로 표현된다면 급수를 항별로 미분하거나 적분한 결과가 f를 미분하거나 적분한 결과와 일치한다. 이러한 성질을 사용하면 거듭제곱급수를 활용하여 무한급수의 합을 구할 수 있다.

보기 9. 다음 무한급수의 합을 구해 보자.

$$\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \cdots.$$

$0 < x < 1$인 x에 대하여 다음과 같이 정의하자.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n.$$

그러면 문제의 무한급수는 $f(x)$에 $x = \frac{1}{2}$을 대입한 것과 같다.

$$f(x) = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

이므로

$$\frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

이다. 양변의 역도함수를 구하면

$$\int \frac{f(x)}{x}dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n + C = \frac{x}{1-x} + C$$

이며, 양변을 x에 대하여 미분하면 다음을 얻는다.

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{(1-x)+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

그러므로

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

이다. 이 식에 $x = \frac{1}{2}$을 대입하면 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \cdots = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = 2.$$

$f(x)=(1+x)^m$이라고 정의된 함수 f의 맥클로린 급수를 구해 보자. f의 도함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^m, \\
f'(x) &= m(1+x)^{m-1}, \\
f''(x) &= m(m-1)(m+x)^{m-2}, \\
f'''(x) &= m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}, \\
&\vdots \\
f^{(k)}(x) &= m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)(1+x)^{m-k}.
\end{aligned}$$

각 식에 $x=0$을 대입하면 다음과 같이 f의 맥클로린 급수를 얻는다.

$$\begin{aligned}
1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\cdots \\
+\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!}x^k+\cdots. \qquad \cdots ㉤
\end{aligned}$$

이 거듭제곱급수는 $|x|<1$일 때 절대수렴한다. 이 거듭제곱급수를 f의 **이항급수**(binomial series)라고 부른다.

만약 m이 0 이상인 정수라면 ㉤은 $(m+1)$개의 항을 가진 다항식이 된다.

만약 m이 0도 아니고 자연수도 아니라면 ㉤은 무한히 많은 항을 가진 무한급수가 된다. 또한 ㉤의 항 중에서 x^k을 포함하는 항을 u_k라고 하면

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{m-k}{k+1}x\right| = |x|$$

이므로, 무한급수 ㉤은 $|x|<1$일 때 수렴한다.

이제 표기를 간단하게 하기 위해 다음과 같은 기호를 도입하자.

$$\binom{m}{1}=m,\quad \binom{m}{2}=\frac{m(m-1)}{2!},\quad \binom{m}{k}=\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!}\quad (\text{for } k\ge 3).$$

이와 같이 정의된 값 $\binom{m}{k}$를 **이항계수**(binomial coefficient)라고 부른다.

이항계수를 사용하면 무한급수 ㉤을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{m}{k}x^k. \qquad \cdots ㉥$$

이 무한급수가 $|x|<1$ 범위에서 $(1+x)^m$에 수렴함을 보이자. 식 ㉥으로 정의된 함수를 $g(x)$라고 하자. $|x|<1$일 때 g의 도함수를 구하면

$$g'(x)=\frac{mg(x)}{1+x}$$

이다. $|x|<1$일 때

$$h(x)=\frac{g(x)}{(1+x)^m}$$

라고 하면 $h'(x)=0$이므로 h는 상수함수이다. $h(0)=g(0)=1$이므로, $|x|<1$일 때

$$g(x)=(1+x)^m$$

이다. 그러므로 $|x|<1$일 때 다음을 얻는다.

$$(1+x)^m=1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{m}{k}x^k.$$

보기 10. $m=-1$일 때

$$\binom{-1}{1}=-1,\quad \binom{-1}{2}=\frac{(-1)\times(-2)}{2!}=1,$$

$$\binom{-1}{k}=\frac{(-1)(-2)(-3)\cdots(-1-k+1)}{k!}=(-1)^k\times\frac{k!}{k!}=(-1)^k$$

이므로 다음을 얻는다.

$$(1+x)^{-1}=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k x^k=1-x+x^2-x^3+-\cdots$$

보기 11. $m=\frac{1}{2}$일 때 $(1+x)^m$의 이항급수는 다음과 같다.

$$(1+x)^{1/2}=1+\frac{x}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}x^2+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}x^3+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{4!}x^4+\cdots$$

$$=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+\cdots.$$

여기서 x를 다른 식으로 바꾸면 다음과 같은 근사식을 얻는다.

$$\sqrt{1-x^2}\ \fallingdotseq\ 1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}\qquad (x\text{의 값이 }0\text{에 가까울 때}),$$

$$\sqrt{1-\frac{1}{x}}\ \fallingdotseq\ 1-\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}\qquad (x\text{의 값이 }0\text{으로부터 멀 때}).$$

테일러 급수를 활용하면 알려진 함수의 결합 형태로서 부정적분을 구할 수 없을 때도 정적분의 근삿값을 구할 수 있다.

보기 12. 다음 정적분의 근삿값을 오차가 0.001 이하가 되도록 구해 보자.

$$\int_0^1 \sin x^2\,dx.$$

$\sin x$의 맥클로런 급수에서 x를 x^2으로 바꾸면 다음을 얻는다.

$$\sin x^2 = x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\frac{x^{14}}{7!}+-\cdots.$$

그러므로 다음을 얻는다.

$$\int \sin x^2\,dx = \frac{x^3}{3!}-\frac{x^7}{7\times 3!}+\frac{x^{11}}{11\times 5!}-\frac{x^{15}}{15\times 7!}+-\cdots+C,$$

$$\int_0^1 \sin x^2\,dx = \frac{1}{3}-\frac{1}{7\times 3!}+\frac{1}{11\times 5!}-\frac{1}{15\times 7!}+-\cdots.$$

두 번째 등식의 우변은 교대급수이며 세 번째 항의 값이 $1/(11\times 5!)\fallingdotseq 0.00076$으로서 0.001보다 작다. 그러므로 교대급수의 오차의 한계 공식에 의하여, 두 번째 항까지 부분합을 구하면 오차가 0.001 이하가 된다. 따라서 구하는 근삿값은 다음과 같다.

$$\int_0^1 \sin x^2\,dx\ \fallingdotseq\ \frac{1}{3}-\frac{1}{7\times 3!}=0.310268\cdots.$$

4 오일러의 등식

임의의 실수 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots.$$

이 등식이 x가 허수일 때도 성립한다고 가정하자. 그리고 x에 순허수 $b\boldsymbol{i}$를 대입하자. 그러면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}
e^{bi} &= 1 + (b\boldsymbol{i}) + \frac{(b\boldsymbol{i})^2}{2!} + \frac{(b\boldsymbol{i})^3}{3!} + \frac{(b\boldsymbol{i})^4}{4!} + \frac{(b\boldsymbol{i})^5}{5!} + \frac{(b\boldsymbol{i})^6}{6!} + \frac{(b\boldsymbol{i})^7}{7} + \cdots \\
&= 1 + b\boldsymbol{i} - \frac{b^2}{2!} - \frac{b^3}{3!}\boldsymbol{i} + \frac{b^4}{4!} + \frac{b^5}{5!}\boldsymbol{i} - \frac{b^6}{6!} - \frac{b^7}{7!}\boldsymbol{i} + - \cdots \\
&= \left(1 - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} - \frac{b^6}{6!} + - \cdots\right) + \left(b - \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} - \frac{b^7}{7!} + - \cdots\right)\boldsymbol{i} \\
&= \cos b + \boldsymbol{i} \sin b.
\end{aligned}$$

지수가 복소수일 때도 지수법칙이 성립한다고 가정하면 a와 b가 실수일 때 다음을 얻는다.

$$e^{a+bi} = e^a \times e^{bi} = e^a(\cos b + \boldsymbol{i} \sin b).$$

한편 b가 실수일 때 두 등식

$$e^{bi} = \cos b + \boldsymbol{i} \sin b,$$
$$e^{-bi} = \cos b - \boldsymbol{i} \sin b$$

을 연립하여 $\cos b$와 $\sin b$에 대하여 풀면 다음을 얻는다.

$$\cos b = \frac{e^{bi} + e^{-bi}}{2}, \quad \sin b = \frac{e^{bi} - e^{-bi}}{2\boldsymbol{i}}.$$

그러므로 정의역이 복소수인 지수함수와 삼각함수를 다음과 같이 '정의'하는 것이 자연스럽다.

정의역이 복소수인 지수함수와 삼각함수

$z = a + b\boldsymbol{i}$이고 a와 b가 실수일 때 다음과 같이 정의한다.

- $e^z = e^a(\cos b + \boldsymbol{i} \sin b)$
- $\sin z = \dfrac{e^{zi} - e^{-zi}}{2\boldsymbol{i}}$
- $\cos z = \dfrac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}$

특히 임의의 실수 θ에 대하여

$$e^{\theta i} = \cos\theta + \boldsymbol{i} \sin\theta$$

가 성립한다. 이 등식을 **오일러의 공식**(Euler's formula)이라고 부른다. 이 식에 $\theta = \pi$를 대입하면

$$e^{\pi i} = \cos\pi + \boldsymbol{i} \sin\pi = -1$$

이므로

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

을 얻는다. 이 등식을 **오일러의 등식**(Euler's identity)이라고 부른다. 오일러의 등식은 수학에서 가장 많이 사용하는 상수 0, 1, π, $\boldsymbol{i}$, e와 덧셈, 곱셈, 거듭제곱, 등호가 딱 한 번씩 사용된 아름다운 식이다.

연습문제

개념에 익숙해지기 위한 문제

1. 다음 거듭제곱급수의 수렴구간을 구하시오.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} n!\,x^n$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \times 2^n}$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n \times 4^n}$

(8) $\sum_{n=1}^{\infty} (5x)^n$

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n$

(10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1}$

(11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}}$

(12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n+1)}$

(13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

(14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$

(15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n}$

(16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{2n}}{5^n}$

2. 다음과 같이 정의된 함수 f의 맥클로런 급수를 구하시오.

(1) $f(x) = e^{-x}$

(2) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

(3) $f(x) = \sinh x$

(4) $f(x) = \cosh x$

(5) $f(x) = \ln(1-x)$

(6) $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$

(7) $f(x) = \frac{1}{3-x}$

(8) $f(x) = \sin^2 x$

(9) $f(x) = x \sin 3x$

(10) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

개념을 다지기 위한 문제

3. 다음 거듭제곱급수의 수렴구간을 구하시오.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{10^n} x^n$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{\sqrt{n}\, 2^n}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} x^n$

(5) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(\ln n)^n}$

(6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(\ln n)^2}$

4. 정적분 $\int_0^{1/2} \cos x^2 \, dx$의 값을 소수점 아래 셋째 자리까지 구하시오.

5. $\ln 1.1$의 값을 소수점 아래 셋째 자리까지 구하시오.

6. 정적분 $\int_0^1 \sqrt{x} \sin x \, dx$의 값을 소수점 아래 둘째 자리까지 구하시오.

7. $\tan^{-1}\dfrac{1}{2}$의 값을 소수점 아래 둘째 자리까지 구하시오.

8. 다음 무한급수를 x에 대한 닫힌 형태의 식으로 나타내시오.
['닫힌 형태'란 무한급수를 사용하지 않고 알려진 함수의 결합 형태로 나타내는 것을 이른다.]

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n}$

(5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{n(n+1)}$

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n}}{4n}$

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$

(10) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+4)x^n$

9. 함수 f와 점 c가 다음과 같을 때, c를 중심으로 하는 f의 테일러 급수를 구하시오.

(1) $f(x) = \cos x$, $c = \dfrac{\pi}{2}$.

(2) $f(x) = \ln(2+x)$, $c = 0$.

(3) $f(x) = \sqrt{x}$, $c = 2$.

10. 거듭제곱급수의 수렴반지름을 구하는 **코시-아다마르 공식**(Cauchy-Hadamard formula)을 조사해 보자.

실력을 향상시키기 위한 문제

11. 거듭제곱급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$의 수렴반지름이 R일 때, 거듭제곱급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$의 수렴반지름이 $\sqrt{R}$임을 보이시오.

12. 수열 $\{a_n\}$의 항 중에서 0이 아닌 정수인 것이 무한히 많다고 하자. 이때 거듭제곱급수 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$의 수렴반지름이 1 이하임을 보이시오.

13. 거듭제곱급수 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$의 수렴반지름이 양수이고, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$이라고 하자.
이때 다음 물음에 답하시오.

(1) f가 우함수이면, 0 이상인 임의의 정수 k에 대하여 $a_{2k+1} = 0$이다.

(2) f가 기함수이면, 0 이상인 임의의 정수 k에 대하여 $a_{2k} = 0$이다.

14. 거듭제곱급수의 곱을 사용하여 $e^x \cos x$의 맥클로린 급수의 처음 다섯 개 항을 구하시오.

15. 거듭제곱급수의 곱을 사용하여 $e^x \sin x$의 맥클로런 급수의 처음 다섯 개 항을 구하시오.

16. 다음 물음에 답하시오.

(1) $f(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$일 때 f의 맥클로런 급수를 구하시오.

(2) $\int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$의 값을 소수점 아래 셋째 자리까지 구하시오.

17. $f(x) = \tan^{-1} x$일 때 f의 테일러 급수를 사용하여 $f^{(99)}(0)$의 값을 구하시오.

18. $f(x) = e^{x^2}$일 때 f의 테일러 급수를 사용하여 $f^{(100)}(0)$의 값을 구하시오.

19. $f(x) = (x^2 + x + 1)^{-1}$일 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) f의 맥클로런 급수를 구하시오.

(2) $f^{(36)}(0)$의 값을 구하시오.

20. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$의 맥클로런 급수를 구하고, 그 결과를 사용하여 $\sin^{-1} x$의 맥클로런 급수를 구하시오.

더 깊이 공부하고 싶은 사람을 위한 문제

21. y가 x에 대한 해석적 함수일 때, 거듭제곱급수를 사용하여 다음 초깃값 문제의 해를 구하시오.

(1) 미분방정식: $y' = -xy$, 초기조건: $x = 0$일 때 $y = 1$.

(2) 미분방정식: $y'' = 4y$, 초기조건: $x = 0$일 때 $y = 0$, $y' = 1$.

(3) 미분방정식: $y'' = -y$, 초기조건: $x = 0$일 때 $y = 0$, $y' = 1$.

22. 자연상수 e가 무리수임을 보이려고 한다.

(1) $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$이라고 하자. 이때 $e - s_n < \frac{1}{n!\,n}$임을 보이시오.

(2) e가 유리수라고 가정하고 $e = p/q$이며 p와 q가 서로소인 자연수라고 하자. 이때 $q!\,s_q$도 자연수임을 보이시오. 또한 $q!(e - s_q)$가 정수임을 보이시오.

(3) $0 < q!(e - s_q) < 1$임을 보이시오.

(4) 위 (2)와 (3)을 결합하여 모순을 유도하고 e가 무리수임을 설명하시오.

23. 두 거듭제곱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$과 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$의 수렴반지름이 각각 양수 R_1, R_2라고 하자.

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

일 때, $|x| < \min\{R_1, R_2\}$인 x에 대하여 다음이 성립함을 보이시오.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right).$$

이 공식을 **거듭제곱급수의 코시 곱**(Cauchy product)이라고 부른다.

24. 지수함수의 맥클로런 급수와 거듭제곱급수의 코시 곱을 사용하여 임의의 실수 x, y에 대하여

$$\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$$

가 성립함을 보이시오.

수학을 사랑하는 사람을 위한 문제

1. 거듭제곱급수의 수렴에 관한 **아벨의 정리**(Abel's theorem)를 조사해 보자.

2. $\{f_n\}$이 구간 I에서 정의된 함수로 이루어진 함수열이라고 하자. 만약 임의의 양수 ϵ에 대하여 자연수 N이 존재하여 $n > N$, $m > N$인 모든 항번호 n, m에 대하여 $\|f_m - f_n\|_\infty < \epsilon$이 성립하면 "$\{f_n\}$이 **코시 조건**(Cauchy criterion)을 만족시킨다."라고 말한다. 다음을 보이시오.
   (1) 함수열 $\{f_n\}$이 균등수렴하면 $\{f_n\}$은 코시 조건을 만족시킨다.
   (2) 함수열 $\{f_n\}$이 코시 조건을 만족시키면 $\{f_n\}$은 균등수렴한다.

3. $\{f_n\}$이 구간 $[a, b]$에서 정의된 함수열이고 다음 세 조건을 모두 만족시킨다고 하자.
   (i) 함수열 $\{f_n\}$이 함수 f에 수렴한다.
   (ii) 임의의 n에 대하여 f_n이 미분 가능하고, f_n'이 $[a, b]$에서 적분 가능하다.
   (iii) 함수열 $\{f_n'\}$이 연속인 함수 g에 균등수렴한다.
   이때 f가 미분 가능하며 $f' = g$임을 보이시오.

4. $\{a_n\}$이 수열일 때 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$을 생각한 것처럼 $\{f_n\}$이 함수열일 때 함수급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$을 생각할 수 있다. $\{f_n\}$이 모든 항이 구간 I에서 정의된 함수로 이루어진 함수열이라고 하자.
   다음을 보이시오.
   (1) I에서 함수급수 $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$이 균등수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$도 균등수렴한다.
   (2) 양항수열 $\{M_n\}$이 존재하여 임의의 $x \in I$와 n에 대하여 $|f_n(x)| \le M_n$을 만족시키고 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$이 균등수렴한다. 이 정리를 **M-판정법**(Weierstrass M-test)이라고 부른다.

5. 거듭제곱급수 $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$이 구간 $[a, b]$에서 수렴한다고 하자. 다음을 보이시오.
   (1) S는 구간 $[a, b]$에서 균등수렴한다.
   (2) $\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b a_n x^n \, dx \right)$
   (3) $a < x < b$이면 $\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} a_n x^n \right)$이다.

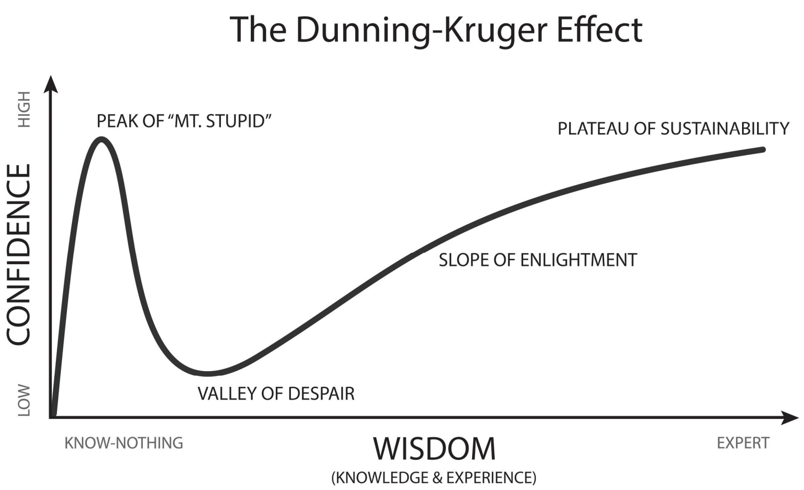
6. 지수가 무리수인 거듭제곱을 정의하는 여러 가지 방법을 조사해 보자.
   (1) 무리수에 수렴하는 유리수열을 지수에 두고 극한을 취하는 방법
   (2) 지수가 유리수인 거듭제곱의 집합의 최소상계를 취하는 방법
   (3) 거듭제곱급수를 사용하여 자연지수함수 $\exp(x)$를 정의한 후 이를 사용하여 밑이 e가 아닌 지수함수를 정의하는 방법
   (4) 적분을 사용하여 자연로그함수를 정의한 뒤 그 역함수로 지수함수를 정의하는 방법
   (5) 블랙핑크의 멤버를 초대하는 방법

7. 실수 범위에서 삼각함수를 정의하는 여러 가지 방법을 조사해 보자.
   (1) 좌표평면에서 원을 사용하여 기하학적으로 정의하는 방법
   (2) 적분을 사용하여 정의하는 방법
   (3) 거듭제곱급수를 사용하여 정의하는 방법
   (4) 복소수 범위에서 자연지수함수를 정의하고 이를 사용하여 삼각함수를 정의하는 방법

8. 다음 물음에 답하시오.
   (1) 정의역이 복소수 범위인 자연지수함수가 일대일함수가 되는지 조사해 보자.
   (2) 밑이 실수이고 지수가 허수인 거듭제곱을 정의해 보자.
   (3) 복소수 범위에서 로그함수를 정의해 보자. 로그함수가 하나의 값만 가지는가?
   (4) 밑과 지수가 모두 허수인 거듭제곱을 정의해 보자.

9. 이 책의 내용을 A4 용지 10쪽 내외로 요약해 보시오.

10. 후배에게 미적분학 입문을 권하는 편지를 작성해 보시오. 단, 편지는 미적분학을 소개하는 내용을 담고 있어야 하며, 설득력이 있어야 한다.



영어로 표현하기 (무한급수와 테일러 급수)

☐ Given a sequence of numbers $\{a_n\}$, an expression of the form

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

is an infinite series. The sequence $\{S_n\}$ defined by $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ is the sequence of partial sum of the series, the number S_n being the nth partial sum. If the sequence of partial sums converges to a limit S, we say that the series converges and that its sum is L.

☐ If $|r| < 1$, the geometric series $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$ converges to $a/(1-r)$. If $|r| \ge 1$, the series diverges.

☐ If a series $\sum a_n$ converges, then $a_n \to 0$.

☐ Let $\{a_n\}$ be a sequence of positive terms. Suppose that $a_n = f(n)$, where f is a continuous, positive, decreasing function of x for all $x \ge N$, where N is a positive integer. Then the series

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n$$

and the integral

$$\int_N^{\infty} f(x)dx$$

both converge or both diverge.

☐ Suppose that $a_n > 0$ and $b_n > 0$ for all $n \ge N$ for some integer N. If $a_n/b_n \to c > 0$, then $\sum a_n$ and $\sum b_n$ both converge or both diverge.

☐ A series $\sum a_n$ converges absolutely if the corresponding series of absolute values, $\sum |a_n|$, converges. A convergent series that is not absolutely convergent is conditionally convergent.

☐ If a series converges absolutely, then it converges, that is, if $\sum |a_n|$ converges, then $\sum a_n$ converges.

☐ Let $\sum a_n$ be any series and suppose that $|a_{n+1}/a_n| \to \rho$. If $\rho < 1$, then the series converges absolutely. If $\rho > 1$ or ρ is infinite, then the series diverges. If $\rho = 1$, then the test is inconclusive.

☐ Let $\sum a_n$ be any series and suppose that $\sqrt[n]{|a_n|} \to \rho$. If $\rho < 1$, then the series converges absolutely. If $\rho > 1$ or ρ is infinite, then the series diverges. If $\rho = 1$, then the test is inconclusive.

☐ If a sequence $\{c_n\}$ is monotone and converges to 0, then the series $\sum (-1)^{n+1} c_n$ converges.

□ If $\sum a_n$ converges absolutely and $\{b_n\}$ is any arrangement of $\{a_n\}$, then $\sum b_n$ converges absolutely and $\sum b_n = \sum a_n$.

□ If $\sum a_n$ converges conditionally and A is any real number, then there exists an arrangement $\{b_n\}$ of $\{a_n\}$ such that $\sum b_n$ converges to A.

□ The nth-order Taylor polynomial of f at c is the polynomial

$$f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-c)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

□ A power series about $x=c$ is an infinite series of the form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2+\cdots$$

in which the center c and the coefficients a_0, a_1, a_2, $\cdots$ are constants.

□ The Taylor series generated by a function f at c is the power series

$$f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-c)^3+\cdots.$$

When $c=0$, the series is also called a Maclaurin series.

□ The set of points at which a power series $\sum a_n(x-c)^n$ converges is an interval; the interval is called the interval of convergence. The interval of convergence may be open, closed, or half-open, depending on the particular series.

□ Let $R_n(x)$ be the remainder of order n of f by the Taylor polynomial $P_n(x)$ over I. If $R_n(x) \to 0$ as $n \to \infty$ for all $x \in I$, we say that the Taylor series generated by f at $x=c$ converges to f on I, and we write

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k.$$

□ If $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-c)^n$ converges on an interval I, and if $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-c)^n$, then the derivative of f on the interior of I is $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1}$.

□ If $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-c)^n$ converges on an interval I, and if $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-c)^n$, then the antiderivative of f on the interior of I is $\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\frac{(x-c)^{n+1}}{n+1}+C$.

부록

집합과 함수

이 단원에서는 수학 I 과 수학 II 에서 배운 개념을 복습하고, 논리적으로 서술하기 위해 필요한 개념과 기호를 살펴본다.

1 집합

주어진 조건에 의하여 대상을 분명하게 정할 수 있을 때, 그 대상의 모임을 **집합**이라고 부른다. 이때 집합을 이루는 대상 하나하나를 그 집합의 **원소**라고 부른다.

a가 집합 A의 원소일 때, "a가 집합 A에 **속한다.**"라고 말하고, 이것을 기호로 '$a \in A$'와 같이 나타낸다. 한편 b가 집합 A의 원소가 아닐 때, "b가 집합 A에 속하지 않는다."라고 말하고, 이것을 기호로 '$b \notin A$'와 같이 나타낸다.

자주 사용하는 수의 집합을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

- $\mathbb{N}$: 모든 자연수의 모임
- $\mathbb{Z}$: 모든 정수의 모임
- $\mathbb{Q}$: 모든 유리수의 모임
- $\mathbb{R}$: 모든 실수의 모임
- $\mathbb{C}$: 모든 복소수의 모임

집합에 속하는 모든 원소를 중괄호 안에 나열하여 집합을 나타내는 방법을 **원소나열법**이라고 부른다. 예컨대 10보다 작은 짝수인 자연수의 모임을 원소나열법으로 나타내면

$$\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$$

이다. 한편 원소의 공통된 성질을 조건으로 제시하여 집합을 나타내는 방법을 **조건제시법**이라고 부른다. 예컨대 10보다 작은 짝수인 자연수의 모임은

$$\{\, x \mid x\text{는 10보다 작은 짝수} \,\}$$

와 같이 나타낼 수 있다.

원소가 무한히 많은 집합을 **무한집합**이라고 부르며, 원소의 개수를 0 또는 자연수로 나타낼 수 있는 집합을 **유한집합**이라고 부른다. 집합 A가 유한집합일 때, A의 원소의 개수를 $n(A)$와 같이 나타낸다. 특히 원소가 하나도 없는 집합을 **공집합**이라고 부르며 $\varnothing$과 같이 나타낸다.

두 집합 A, B에 대하여, A의 모든 원소가 B에 속할 때, A를 B의 **부분집합**이라고 부르고, 이것을 기호로 '$A \subset B$'와 같이 나타낸다. 이때 "A가 B에 **포함된다.**" 또는 "B가 A를 포함한다."라고 말한다. 한편 A가 B의 부분집합이 아닐 때, 이것을 기호로 '$A \not\subset B$'와 같이 나타낸다.

두 집합 A, B에 대하여, A의 모든 원소가 B에 속하고 B의 모든 원소가 A에 속할 때 "A와 B는 **서로 같다.**"라고 말하고, 이것을 기호로 '$A = B$'와 같이 나타낸다. 부분집합의 정의에 의하여, $A = B$라는 것은 $A \subset B$이고 $B \subset A$인 것과 같다. 한편 두 집합 A, B가 서로 같지 않을 때, 이것을 기호로 $A \neq B$와 같이 나타낸다. 집합 A가 집합 B의 부분집합이고 A, B가 서로 같지 않을 때 "A가 B의 **진부분집합**이다."라고 말하고, 이것을 기호로 $A \subsetneq B$와 같이 나타낸다.

두 집합 A, B에 대하여 A에 속하거나 B에 속하는 모든 원소로 이루어진 집합을 A와 B의 **합집합**이라고 부르고 '$A \cup B$'와 같이 나타낸다. 또 두 집합 A, B에 대하여 A에도 속하고 B에도 속하는 모든 원소로 이루어진 집합을 A와 B의 **교집합**이라고 부르고 '$A \cap B$'와 같이 나타낸다. 한편 두 집합 A, B에 대하여 A에 속하지만 B에는 속하지 않는 모든 원소로 이루어진 집합을 A에 대한 B의 **차집합**이라고 부르고 '$A \setminus B$' 또는 '$A - B$'와 같이 나타낸다.

합집합, 교집합, 차집합을 조건제시법으로 나타내면 다음과 같다.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 또는 } x \in B\},$$
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 그리고 } x \in B\},$$
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 그리고 } x \notin B\}.$$

어떤 집합에 대하여 그 부분집합을 생각할 때, 처음 집합을 **전체집합**이라고 부르고, 이 집합을 기호로 주로 U로 나타낸다.[65] 집합 A가 전체집합 U의 부분집합일 때, U의 원소 중에서 A에 속하지 않는 모든 원소로 이루어진 집합을 U에 대한 A의 **여집합**이라고 부르고 기호로 'A^C'와 같이 나타낸다.[66] 전체집합 U에 대한 부분집합 A의 여집합을 조건제시법으로 나타내면 다음과 같다.

$$A^C = \{x \mid x \in U \text{ 그리고 } x \notin A\}.$$

U가 전체집합이고 A와 B가 U의 부분집합일 때 다음이 성립한다.

$$A \setminus B = A \cap B^C.$$

U가 전체집합이고 A, B, C가 U의 부분집합일 때 다음이 성립한다.

- $(A^C)^C = A$
- $\varnothing^C = U$, $U^C = \varnothing$
- $A \subset A \cup B$
- $A \cap B \subset A$
- $A \cup B = B \cup A$ (합집합의 교환법칙)
- $A \cap B = B \cap A$ (교집합의 교환법칙)
- $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cup U = U$, $A \cap U = A$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (합집합의 결합법칙)
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (교집합의 결합법칙)
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (집합의 분배법칙)
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (집합의 분배법칙)
- $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ (드 모르간의 법칙)
- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ (드 모르간의 법칙)
- $A \subset B$이고 $B \subset C$이면, $A \subset C$이다. (집합의 추이법칙)

65) 전체집합을 항상 U로 나타내는 것은 아니다.

66) 별다른 언급 없이 집합을 나타낼 때 C가 위첨자로 쓰이면 여집합을 나타내는 것으로 약속한다.

2 수학의 논리

수학에서 정의나 정리 또는 증명을 진술할 때 모호함을 없애고 표현을 간단하게 하기 위하여 기호를 사용한다. 자주 사용하는 기호는 다음과 같은 것들이 있다.

논리식	이름	의미
$\neg p$	p의 부정	“p가 아니다.”
$p \vee q$	p와 q의 논리합	“p 또는 q가 성립한다.”
$p \wedge q$	p와 q의 논리곱	“p와 q가 모두 성립한다.”
$p \rightarrow q$	조건부	“p이면 q이다.”
$p \leftrightarrow q$	쌍조건부	“p와 q의 참 · 거짓이 일치한다.”

위 표에서 p와 q는 각각 수학적 진술을 하나의 문자로 나타낸 것이다.

각 논리식은 p와 q의 진릿값에 따라 그 진릿값이 정해진다. 예컨대 p가 참일 때 $\neg p$가 거짓이고, p가 거짓일 때 $\neg p$가 참이다. 진술 p, q의 진릿값에 따른 여러 가지 논리식의 진릿값은 다음과 같다.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	F
F	T	T	F	T	F
F	F	F	F	T	T

위 표에서 ‘T’는 ‘참’을 나타내고, ‘F’는 ‘거짓’을 나타낸다.

만약 논리식 $p \rightarrow q$가 참이면 ‘$p \Rightarrow q$’와 같이 나타낸다. 이때 “p가 q이기 위한 **충분조건**이다.” 또는 “q가 p이기 위한 **필요조건**이다.”라고 말한다.

만약 논리식 $p \leftrightarrow q$가 참이면 ‘$p \Leftrightarrow q$’와 같이 나타낸다. 이때 “p와 q가 서로 **필요충분조건**이다.”라고 말한다.

논리식 $p \rightarrow q$에서 p를 $p \rightarrow q$의 **가정**이라고 부르고, q를 $p \rightarrow q$의 **결론**이라고 부른다. 논리식 $p \rightarrow q$에서 가정과 결론의 자리를 바꾼 논리식 $q \rightarrow p$를 $p \rightarrow q$의 **역**이라고 부른다. 논리식 $p \rightarrow q$에서 가정과 결론을 부정한 후 역을 취한 논리식 $(\neg q) \rightarrow (\neg p)$를 $p \rightarrow q$의 **대우**라고 부른다.

논리식 $p \rightarrow q$와 대우 $(\neg q) \rightarrow (\neg p)$는 항상 진릿값이 일치한다. 이 사실을 기호로 나타내면 다음과 같다.

$$[p \rightarrow q] \Leftrightarrow [(\neg q) \rightarrow (\neg p)].$$

보기 **1.** 논리식 $p \rightarrow q$와 그 대우 $(\neg q) \rightarrow (\neg p)$의 진릿값을 진리표로 작성하면 다음과 같다.

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$(\neg q) \rightarrow (\neg p)$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

이 진리표를 통해 $p \rightarrow q$의 진릿값과 $(\neg q) \rightarrow (\neg p)$의 진릿값이 항상 일치함을 확인할 수 있다.

진술 p가 그 자체로서 참 · 거짓이 정해질 때도 있지만, 변수에 값을 대입해야만 참 · 거짓이 정해지는 경우도 있다. 예컨대 "8은 짝수이다."나 "2와 3의 합은 7이다."는 그 자체로 참 · 거짓이 정해지지만, "자연수 x가 짝수이다."는 x에 자연수를 대입해야만 참 · 거짓이 정해진다. 이처럼 변수에 값을 대입해야 진릿값이 정해지는 진술을 **명제함수**라고 부른다.

명제함수를 문자로 나타낼 때 하나의 문자를 사용하여 p, q, r, $\cdots$와 같이 나타내기도 하고, 변수를 붙여서 $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $\cdots$와 같이 나타내기도 한다.

p와 q가 명제함수일 때 부정 $\neg p$, 논리합 $p \vee q$, 논리곱 $p \wedge q$ 또한 명제함수이다. 마찬가지로 p와 q가 명제함수일 때 조건부 $p \rightarrow q$과 쌍조건부 $p \leftrightarrow q$는 명제함수이다.

보기 2. U가 전체집합이고 A와 B가 U의 부분집합이라고 하자. 이때 합집합, 교집합, 차집합, 여집합의 정의를 논리 기호를 사용하여 나타내면 다음과 같다.

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\},$$
$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\},$$
$$A \setminus B = \{x \in U \mid x \in A \wedge \neg(x \in B)\},$$
$$A^C = \{x \in U \mid \neg(x \in A)\}.$$

$p(x)$가 전체집합 U의 원소 x를 대상으로 하는 명제함수라고 하자. 이때 U의 원소 x 중에서 $p(x)$가 참이 되도록 하는 것들로 이루어진 집합을 $p(x)$의 **진리집합**이라고 부르고

$$\{x \in U \mid p(x)\}$$

와 같이 나타낸다.

보기 3. "자연수 x가 짝수이다."라는 문장을 $p(x)$로 나타내면, 자연수 중에서 짝수인 것으로 이루어진 집합은

$$\{x \in \mathbb{N} \mid p(x)\}$$

와 같이 나타낼 수 있다.

변수가 두 개 이상인 명제함수도 생각할 수 있다.

보기 4. "자연수 x가 자연수 y의 약수이다."라는 문장을 $p(x, y)$라고 나타내자.
그러면 다음은 모두 참이다.

$$p(1, 3), \quad p(7, 35), \quad p(13, 2587).$$

그러나 다음은 모두 거짓이다.

$$p(3, 1), \quad p(5, 36), \quad p(12, 2587).$$

집합과 논리를 처음 공부하다 보면 논리식을 사용한 표현에 심취하여 모든 진술을 논리식으로 표현하려고 하거나 서술할 때 논리기호를 과도하게 사용하려고 할 수 있다. 하지만 논리기호는 수학의 진술을 명료하게 하도록 돕기 위해 만들어진 것이므로 적절한 형태로 사용해야 한다.

3 한정명제와 논리적 추론

U가 집합이고, $p(x)$가 U의 원소 x를 대상으로 하는 명제함수라고 하자. 또한 $p(x)$의 진리집합을 P라고 하자. 이때 다음과 같이 정의한다.

- 만약 U의 모든 원소 x에 대하여 $p(x)$가 참이라면, 즉 $P=U$라면, 이것을 기호로

$$\forall x \in U:\ p(x)$$

  와 같이 나타낸다. 이때 기호 '$\forall$'을 **전칭기호**라고 부르고, 위 식과 같이 전칭기호를 사용한 논리식을 **전칭명제**라고 부른다.

- 만약 U의 원소 x 중에서 $p(x)$가 참이 되도록 하는 것이 하나 이상 존재하면, 즉 $P \cap U \neq \varnothing$이라면, 이것을 기호로

$$\exists x \in U:\ p(x)$$

  와 같이 나타낸다. 이때 기호 '$\exists$'를 **존재기호**라고 부르고, 위 식과 같이 존재기호를 사용한 논리식을 **존재명제**라고 부른다.

- 전칭기호와 존재기호를 통틀어 **한정기호**라고 부른다. 또한 전칭명제와 존재명제를 통틀어 **한정명제**라고 부른다.67)

보기 5. "방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근이 존재한다."를 한정기호를 사용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\exists x \in \mathbb{R}:\ \left(ax^2+bx+c=0\right).$$

보기 6. U가 전체집합이고 A와 B가 U의 부분집합이라고 하자. 이때 $A=B$의 정의를 논리기호를 사용하여 나타내면 다음과 같다.

$$(A=B) \Leftrightarrow \ \forall x \in U:\ (x \in A \ \leftrightarrow \ x \in B).$$

p와 q가 영역 U의 원소 x를 대상으로 하는 명제함수이고, 두 명제함수의 진리집합을 각각 P, Q라고 하자. 이때 다음과 같이 정의한다.

- 만약 $P \subset Q$이면

$$\forall x \in U:\ (p(x) \rightarrow q(x))$$

  가 참이다. 이때 $p \Rightarrow q$와 같이 나타내고, "p가 q이기 위한 **충분조건**이다." 또는 "q가 p이기 위한 **필요조건**이다."라고 말한다.

- 만약 $P=Q$이면

$$\forall x \in U:\ (p(x) \leftrightarrow q(x))$$

  가 참이다. 이때 $p \Leftrightarrow q$와 같이 나타내고, "p와 q가 서로 **필요충분조건**이다."라고 말한다.

---

67) "$\forall x$에 대하여"나 "$\exists x$에 대하여" 같은 표현은 한정기호를 잘못 사용한 것이다. 왜냐하면 이 문장은 각각 "(모든 x에 대하여)에 대하여", "(에 대하여)를 만족시키는 x가 존재한다"와 같기 때문이다.

보기 7. x가 실수일 때, "x가 3보다 크다."를 $p(x)$로 나타내고 "x가 2보다 크다."를 $q(x)$로 나타내자. 그러면 모든 실수 x에 대하여 $p(x) \to q(x)$는 참이다. 그러므로 $p(x) \Rightarrow q(x)$이다. 이것은 다음과 같이 부등호를 사용하여 나타낼 수 있다.

$$x > 3 \;\Rightarrow\; x > 2.$$

이 식은 "$x > 3$이라는 전제로부터 $x > 2$라는 결과를 얻을 수 있다."라고 해석할 수 있다. 이처럼 실제 수학의 내용을 서술할 때 기호 '$\Rightarrow$'는 "하나의 사실로부터 또 다른 사실을 추론할 수 있다."라는 뜻으로 해석한다.

x가 실수일 때 "$(x+3)(x-2)=0$"을 $p(x)$로 나타내고 "$x=-3 \;\vee\; x=2$"를 $q(x)$로 나타내자. 그러면 모든 실수 x에 대하여 $p(x) \leftrightarrow q(x)$는 참이다. 그러므로 $p(x) \;\Leftrightarrow\; q(x)$이다. 이것은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(x+3)(x-2)=0 \;\Leftrightarrow\; [\,x=-3 \;\vee\; x=2\,].$$

이처럼 기호 '$\Leftrightarrow$'는 "두 식의 참 · 거짓이 항상 일치한다."라는 뜻으로 해석한다.

항상 참인 논리식을 **항진**이라고 부르고 't'와 같이 나타낸다. 항상 거짓인 논리식을 **모순**이라고 부르고 'c'와 같이 나타낸다. 이와 같은 표기법을 사용하면 공집합의 정의는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\forall x \in U : (x \in \varnothing \;\leftrightarrow\; c).$$

보기 8. 공집합이 임의의 집합의 부분집합임을 증명해 보자. U가 전체집합이고 A가 임의의 집합이라고 하자. $\varnothing \subset A$를 논리식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\forall x \in U:\; (x \in \varnothing \;\to\; x \in A).$$

그런데 조건부 $x \in \varnothing \;\to\; x \in A$에서 가정인 $x \in \varnothing$가 거짓이므로 결론인 $x \in A$의 진릿값에 상관없이 $x \in \varnothing \;\to\; x \in A$가 참이다.68) 그러므로

$$\forall x \in U:\; (x \in \varnothing \;\to\; x \in A)$$

도 참이다. 따라서 $\varnothing \subset A$가 참이다.

다음은 수학에서 자주 사용하는 추론 법칙이다.69)

- $\neg(\neg p) \;\Leftrightarrow\; p$ (이중부정 법칙)
- $p \;\Rightarrow\; (p \vee q)$
- $(p \wedge q) \;\Rightarrow\; p$
- $(p \vee q) \;\Leftrightarrow\; (q \vee p)$ (논리합의 교환법칙)
- $(p \wedge q) \;\Leftrightarrow\; (q \wedge p)$ (논리곱의 교환법칙)
- $[\,(p \vee q) \vee r\,] \;\Leftrightarrow\; [\,p \vee (q \vee r)\,]$ (논리합의 결합법칙)
- $[\,(p \wedge q) \wedge r\,] \;\Leftrightarrow\; [\,p \wedge (q \wedge r)\,]$ (논리곱의 결합법칙)
- $[\,p \vee (q \wedge r)\,] \;\Leftrightarrow\; [\,(p \vee q) \wedge (p \vee r)\,]$ (논리식의 분배법칙)
- $[\,p \wedge (q \vee r)\,] \;\Leftrightarrow\; [\,(p \wedge q) \vee (p \wedge r)\,]$ (논리식의 분배법칙)

---

68) 가정 p가 거짓이면 결론 q의 진릿값에 상관없이 논리식 $p \to q$가 참이다. 이처럼 가정이 거짓이기 때문에 결론에 상관없이 조건부가 참이 될 때 "공조건적으로 참이다"라고 말한다.

69) 이 법칙을 무작정 외우려 하지 말고, 법칙이 왜 성립하는지 직접 설명하며 자연스럽게 기억에 남도록 해야 한다.

- $[\neg(p \vee q)] \Leftrightarrow [(\neg p) \wedge (\neg q)]$ (드 모르간의 법칙)
- $[\neg(p \wedge q)] \Leftrightarrow [(\neg p) \vee (\neg q)]$ (드 모르간의 법칙)
- $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \Rightarrow [p \to r]$ (논리식의 추이법칙)
- $[\neg(\forall x \in U:\ p(x))] \Leftrightarrow [\exists x \in U:\ (\neg p(x))]$ (전칭명제의 부정법칙)
- $[\neg(\exists x \in U:\ p(x))] \Leftrightarrow [\forall x \in U:\ (\neg p(x))]$ (존재명제의 부정법칙)
- $[\forall x \in U:\ p(x)] \Rightarrow [\exists x \in U:\ p(x)]$
- $[\forall x \in U:\ (p(x) \wedge q(x))] \Leftrightarrow [(\forall x \in U:\ p(x)) \wedge (\forall x \in U:\ q(x))]$
- $[\forall x \in U:\ (p(x) \vee q(x))] \Leftarrow [(\forall x \in U:\ p(x)) \vee (\forall x \in U:\ q(x))]$

보기 9. U가 전체집합이고 A와 B가 U의 부분집합이라고 하자. 이때 $A \subset B$의 정의를 논리식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\forall x \in U:\ (x \in A \to x \in B).$$

보기 10. U가 전체집합이고 A, B, C가 U의 부분집합이라고 하자. 이때 추론 규칙을 활용하여

$$(A \subset B \ \wedge\ B \subset C) \Rightarrow A \subset C$$

임을 증명해 보자.

$$\begin{aligned}(A \subset B \ \wedge\ B \subset C) &\Leftrightarrow [\forall x \in U:\ (x \in A \to x \in B)] \wedge [\forall x \in U:\ (x \in B \to x \in C)] \\ &\Leftrightarrow \forall x \in U:\ [(x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in C)] \\ &\Rightarrow \forall x \in U:\ (x \in A \to x \in C) \\ &\Leftrightarrow (A \subset C).\end{aligned}$$

하나의 논리식에 한정기호가 두 개 이상 있는 예를 살펴보자.

보기 11. x와 y가 자연수일 때, “x가 y의 약수이다”를 $p(x,\ y)$라고 나타내자.

(1) $\exists x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N} :\ p(x,\ y)$는 참이다. 왜냐하면 x가 y의 약수인 자연수 x, y가 한 쌍 이상 존재하기 때문이다.

(2) $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N} :\ p(x,\ y)$는 참이다. 왜냐하면 $x=1$일 때 x는 모든 자연수 y의 약수이기 때문이다.

(3) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N} :\ p(x,\ y)$는 참이다. 왜냐하면 임의의 자연수 x에 대하여 x의 배수인 자연수 y가 하나 이상 존재하기 때문이다.

(4) $\forall x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N} :\ p(x,\ y)$는 거짓이다. 왜냐하면 임의의 자연수 x가 항상 임의의 자연수 y의 약수가 되는 것은 아니기 때문이다.

(5) $\forall y \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N} :\ p(x,\ y)$는 참이다. 왜냐하면 임의의 자연수 y에 대하여 y의 약수인 자연수 x가 존재하기 때문이다.

(6) $\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N} :\ p(x,\ y)$는 거짓이다. 왜냐하면 하나의 자연수 y가 모든 자연수 x의 배수가 될 수는 없기 때문이다.

위 **보기**의 (3)과 (6)에서 보다시피 한정기호의 순서가 바뀌면 논리식의 뜻이 달라진다.

4 함수

X와 Y가 공집합이 아닌 집합이라고 하자. X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응될 때, 이 대응을 집합 X에서 집합 Y로의 **함수**라고 부른다. 이 대응의 이름을 f라고 하면, 이 대응에 의해 정의되는 함수를 '$f : X \to Y$'와 같이 나타낸다. 이때 X를 함수 f의 **정의역**, Y를 함수 f의 **공역**이라고 부른다.

함수 f에 의하여 정의역 X의 원소 x에 공역 Y의 원소 y가 대응될 때, 이것을 기호로 $y = f(x)$와 같이 나타내고, $f(x)$를 x의 **함숫값**이라고 부른다. 또한 함수 f의 함숫값 전체의 집합 $\{f(x) \mid x \in X\}$를 함수 f의 **치역**이라고 부른다. 함수 f의 치역은 항상 함수 f의 공역의 부분집합이다.

함수의 구분

함수를 대응 형태에 따라 다음과 같이 구분한다.

- 함수 $f : X \to Y$에서 정의역 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

  일 때, 함수 f를 **일대일함수**라고 부른다.
- 함수 $f : X \to Y$의 치역이 공역 Y와 일치할 때, 함수 f를 '**Y 위로의 함수**'라고 부른다.
- 함수 $f : X \to Y$가 일대일함수이고 Y 위로의 함수일 때, 함수 f를 **일대일대응**이라고 부른다.
- 함수 $f : X \to X$에서 정의역 X의 임의의 원소 x에 대하여 $f(x) = x$일 때, 이 함수 f를 집합 X에서의 **항등함수**라고 부른다.
- 함수 $f : X \to Y$에서 [정의역 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x) = c$]인 c가 Y에 존재할 때, 함수 f를 **상수함수**라고 부른다.

위와 같은 정의를 한정기호를 사용하여 나타내면 다음과 같다.

- 함수 $f : X \to Y$가 일대일함수이다:

$$\forall x_1 \in X \ \forall x_2 \in X : [x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)].$$

- 함수 $f : X \to Y$가 Y 위로의 함수이다:

$$\forall y \in Y \ \exists x \in X : f(x) = y.$$

- 함수 $f : X \to Y$가 일대일대응이다:

$$[\forall x_1 \in X \ \forall x_2 \in X : (x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2))] \wedge [\forall y \in Y \ \exists x \in X : y = f(x)].$$

- 함수 $f : X \to Y$가 항등함수이다:

$$X = Y \wedge [\forall x \in X : f(x) = x].$$

- 함수 $f : X \to Y$가 상수함수이다:

$$\exists c \in Y \ \forall x \in X : f(x) = c.$$

합성함수

일반적으로 세 집합 X, Y, Z에 대하여 두 함수 f, g가

$$f : X \to Z, \quad g : Z \to Y$$

일 때, X의 임의의 원소 x에 함숫값 $f(x)$를 대응시키고, 다시 이 $f(x)$에 $g(f(x))$를 대응시키면 X를 정의역으로 하고 Y를 공역으로 하는 새로운 함수를 정의할 수 있다. 이 함수를 함수 f와 g의 **합성함수**라고 부르고, 기호로 '$g \circ f$'와 같이 나타낸다.

또 합성함수 $g \circ f$에서 x의 함숫값을 기호로 $(g \circ f)(x)$와 같이 나타낸다. 이때 X의 모든 원소 x에 대하여

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

이므로 두 함수 f와 g의 합성함수를 '$y = g(f(x))$'로도 나타낸다.

> **보기** **12.** 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 다음과 같이 정의되어 있다고 하자.
> $$f(x) = x+3, \quad g(x) = x^2.$$
> 이때 합성함수 $g \circ f$는
> $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x+3)^2$$
> 이라고 정의된 함수이다. 이 함수의 정의역은 $\mathbb{R}$이고 치역은 0 이상인 실수 전체의 집합이다.
> 한편 합성함수 $f \circ g$는
> $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x^2+3$$
> 이라고 정의된 함수이다. 이 함수의 정의역은 $\mathbb{R}$이고 치역은 3 이상인 실수 전체의 집합이다.
> 이 예에서 보다시피 일반적으로 $g \circ f \neq f \circ g$이다.

역함수

함수 $f : X \to Y$가 일대일대응이면 Y의 각 원소 y에 대하여 $y = f(x)$인 X의 원소 x가 오직 하나 존재한다. 이때 Y의 각 원소 y에 $y = f(x)$인 X의 원소 x를 대응시키면 Y를 정의역으로 하고 X를 공역으로 하는 새로운 함수를 정의할 수 있다. 이 함수를 함수 f의 **역함수**라고 부르고, 기호로

$$f^{-1} : Y \to X$$

와 같이 나타낸다. 즉 $x \in X$이고 $y \in Y$일 때,

$$x = f^{-1}(y) \iff y = f(x)$$

이다. 이 사실로부터 다음을 알 수 있다.

- 임의의 $x \in X$에 대하여 $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$,
- 임의의 $y \in Y$에 대하여 $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$.

함수 $f : X \to Y$의 역함수는 f가 일대일대응일 때만 존재한다. f가 일대일대응이 아니라면 집합 Y의 원소 하나에 집합 X의 원소가 두 개 대응되거나, 집합 Y의 원소 중에 집합 X의 원소에 대응되지 않는 것이 존재할 수 있기 때문이다.

보기 **13.** 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 $f(x)=x^3+2$라고 정의되어 있다고 하자. 이 함수의 역함수를 구해보자.

먼저 $x_1<x_2$일 때 $f(x_1)<f(x_2)$이므로 f는 일대일함수이다. 또한 실수 x, y에 대하여

$$y=f(x)\iff y=x^3+2\iff y-2=x^3\iff x=\sqrt[3]{y-2}$$

이므로, 각 실수 y에 대하여 [$y=f(x)$가 되도록 하는 x가 존재]한다. 즉 f의 치역이 $\mathbb{R}$이므로, f는 위로의 함수이다. 그러므로 f는 일대일대응이다. 따라서 f의 역함수가 존재한다.

한편

$$x=f^{-1}(y)\iff y=f(x)\iff x=\sqrt[3]{y-2}$$

이므로

$$f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y-2}$$

이다. 여기서 y를 x로 바꾸면, 구하는 역함수는

$$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-2}$$

이다.

더욱이 $f^{-1}\circ f$와 $f\circ f^{-1}$를 구하면 다음과 같다.

$$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=\sqrt[3]{f(x)-2}=\sqrt[3]{(x^3+2)-2}=x,$$
$$(f\circ f^{-1})(y)=f(f^{-1}(y))=(f^{-1}(y))^3+2=(\sqrt[3]{y-2})^3+2=y.$$

보기 **14.** 정의역이 $\mathbb{R}$인 함수 $y=\sin x$는 일대일대응이 아니다. 왜냐하면 임의의 실수 x와 임의의 자연수 n에 대하여

$$\sin(x+2n\pi)=\sin x$$

이므로, $x_1\neq x_2$이면서 $\sin x_1=\sin x_2$인 x_1과 x_2가 무수히 많이 존재하기 때문이다.

그러나 사인의 정의역과 공역을 각각

$$X=\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]=\left\{x\in\mathbb{R}\ \middle|\ -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right\},$$
$$Y=[-1,\ 1]=\{y\in\mathbb{R}\mid -1\le y\le 1\}$$

로 제한하면 사인은 X로부터 Y 위로의 일대일대응이 된다.

이때 사인의 역함수를 다음과 같이 정의한다.

$$x=\sin^{-1}y\iff y=\sin x\qquad\left(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$$

마찬가지로 다른 삼각함수의 역함수를 다음과 같이 정의한다.

$$x=\cos^{-1}y\iff y=\cos x\qquad(0\le x\le\pi)$$
$$x=\tan^{-1}y\iff y=\tan x\qquad\left(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$$
$$x=\sec^{-1}y\iff y=\sec x\qquad\left(0\le x\le\pi,\ x\neq\frac{\pi}{2}\right)$$
$$x=\csc^{-1}y\iff y=\csc x\qquad\left(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2},\ x\neq 0\right)$$
$$x=\cot^{-1}y\iff y=\cot x\qquad(0\le x\le\pi)$$

찾아보기

참고한 문헌

[1] 고성은 외 6인, **2015 개정 고등학교 수학 Ⅱ**, (주)좋은책신사고.

[2] 권오남 외 14인, **2015 개정 고등학교 미적분**, (주)교학사.

[3] 김원경 외 14인, **2015 개정 고등학교 미적분**, (주)비상교육.

[4] 김원경 외 14인, **2015 개정 고등학교 수학 Ⅱ**, (주)비상교육.

[5] 류희찬 외 10인, **2015 개정 고등학교 수학 Ⅱ**, (주)천재교과서.

[6] 황선욱 외 8인, **2015 개정 고등학교 미적분**, (주)미래엔.

[7] Abbott, S. (2015). **Understanding Analysis** (2nd ed.). Springer.
번역서: 한빛수학교재연구소 옮김. (2021). **해석학 첫걸음** (2판). 한빛아카데미.

[8] Goldstein, L. J., Lay, D. C., Schneider, D. I., & Asmar, N. H. (2005). **Brief Calculus and Its Applications**. Pearson Education.

[9] Mendelson, E. (2009). **Schaum's Outlines of 3,000 Solved Problems in Calculus**. McGraw-Hill Education.

[10] Mendelson, E. (2009). **Schaum's Outlines of Beginning Calculus** (3rd ed.). McGraw-Hill Education.

[11] Weir, M., & Hass, J. (2013). **Thomas' Calculus: Early Transcendentals** (13th ed.). Pearson.

[12] Wrede, R., & Spiegel, M. (2010). **Schaum's Outlines of Advanced Calculus** (3rd ed.). McGraw-Hill Education.

참고한 내용

- 수열의 극한(1단원), 함수의 극한(2단원), 연속의 개념(4단원), 미분과 도함수(6단원), 함수의 그래프의 모양(9단원), 정적분의 활용(15단원), 무한급수의 수렴과 발산(16단원)에서 고등학교 과정의 미적분학 개념을 설명하고 연습문제를 작성할 때 [1]~[6]의 내용과 연습문제를 참고함.
- 극한의 엄밀한 정의(3단원), 연속의 엄밀한 정의(5단원), 도함수의 활용(10단원), 정적분의 활용(15단원)에서 학부 과정의 미적분의 개념을 설명할 때 [8]~[11]의 내용과 연습문제를 참고함.
- 다양한 무한급수의 판정법(18단원)에서 무한급수의 재배열을 설명할 때와 테일러 급수(19단원)에서 라그랑주의 나머지항 정리를 설명할 때 [7]의 내용을 참고함.
- '영어로 표현하기'의 내용을 작성할 때 [11]과 영문 위키피디아(www.wikipedia.org)를 참고함.